



МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Куйбышевский филиал федерального государственного бюджетного
образовательного учреждения высшего образования «Новосибирский
государственный педагогический университет»**

УТВЕРЖДАЮ

Декан

Факультета психолого-педагогического
образования

(подпись)

Е.А.Завершинская

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Числовые системы

Направление подготовки:

44.03.01 Педагогическое образование

Направленность (профиль):

Математическое образование

Уровень высшего образования:

бакалавриат

Форма обучения:

заочная

СОСТАВИТЕЛИ:

Кандидат педагогических наук, доцент, доцент кафедры математики, информатики и методики преподавания О.А.Тарасова

РЕКОМЕНДОВАНО К ИСПОЛЬЗОВАНИЮ В УЧЕБНОМ ПРОЦЕССЕ

на заседании Ученого совета КФ ФГБОУ ВО «НГПУ» (протокол №8 от 27.04.2024 г.)

1 ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

1.1 Цель освоения дисциплины:

перевести интуитивные знания о числах (натуральных, целых, рациональных, действительных и др.) на твердую основу доказательств, опирающихся на аксиомы, дать обоснование школьного материала, касающегося построения числовых систем.

1.2 Место дисциплины в структуре образовательной программы

Программа дисциплины разработана в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования по направлению подготовки 44.03.01 Педагогическое образование, утвержденным приказом Минобрнауки России от 22.02.2018 г. №121, профессиональными стандартами: педагог (педагогическая деятельность в сфере дошкольного, начального общего, основного общего, среднего общего образования) (воспитатель, учитель), утвержденным приказом Министерства труда и социальной защиты Российской Федерации от 18.10.2013 г. №544н, педагог дополнительного образования детей и взрослых, утвержденным приказом Министерства труда и социальной защиты Российской Федерации от 05.05.2018 г. №298н, педагог (педагогическая деятельность в сфере дошкольного, начального общего, основного общего, среднего общего образования) (воспитатель, учитель), утвержденным приказом Министерства труда и социальной защиты Российской Федерации от 18.10.2013 г. №544н.

Дисциплина относится к обязательной части блока 1 «Дисциплины» учебного плана образовательной программы, изучается в 7 семестре. Трудоемкость дисциплины: 2 ЗЕ / 72 часа, в том числе 10 часов - контактная работа с преподавателем, 58 часов - самостоятельная работа (таблица 2).

1.3 Планируемые результаты обучения по дисциплине

Дисциплина направлена на формирование компетенции(-ий), представленных в таблице 1.

Таблица 1

Планируемые результаты обучения по дисциплине

Код и наименование компетенции	
Индикаторы достижения компетенции	Планируемые результаты обучения по дисциплине
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	
УК-1.1 Демонстрирует знание особенностей системного и критического мышления, аргументированно формирует собственное суждение и оценку информации, принимает обоснованное решение.	Знать: методы критического анализа и синтеза информации Уметь:
УК-1.2 Применяет логические формы и процедуры, способен к рефлексии по поводу собственной и чужой мыслительной деятельности.	применять системный подход для решения поставленных задач Владеть:
УК-1.3 Анализирует источники информации с целью выявления их противоречий и поиска достоверных суждений.	навыками рефлексии по поводу собственной и чужой мыслительной деятельности
ПК-1 Способен осваивать и использовать теоретические знания и практические умения и навыки в предметной области при решении профессиональных задач	
ПК-1.1 Знает структуру, состав и дидактические единицы предметной области (преподаваемого предмета).	Знать: • роль и место математики в общей картине научного знания; • структуру, состав и дидактические единицы содержания школьного курса математики.

<p>ПК-1.2 Умеет осуществлять отбор учебного содержания для его реализации в различных формах обучения в соответствии с требованиями ФГОС ОО.</p>	<p>Уметь: осуществлять отбор учебного содержания для его реализации в различных формах обучения в соответствии с современными требованиями к образованию.</p> <p>Владеть:</p>
<p>ПК-1.3 Демонстрирует умение разрабатывать различные формы учебных занятий, применять методы, приемы и технологии обучения, в том числе информационные.</p>	<ul style="list-style-type: none"> • действием проектирования различных форм учебных занятий, • навыком применения различных методов, приемов и технологий в обучении математике.
<p>ПК-3 Способен формировать развивающую образовательную среду для достижения личностных, предметных и метапредметных результатов обучения средствами преподаваемых учебных предметов</p>	
<p>ПК-3.1 Владеет способами интеграции учебных предметов для организации развивающей учебной деятельности (исследовательской, проектной, групповой и др.).</p>	<p>Знать:</p> <ul style="list-style-type: none"> • характеристику личностных, предметных и метапредметных результатов в контексте обучения математике; • особенности интеграции учебных предметов для организации разных способов учебной деятельности. <p>Уметь:</p> <ul style="list-style-type: none"> • оказывать педагогическую поддержку обучающимся в зависимости от их образовательных результатов; • организовывать учебный процесс с использованием возможностей образовательной среды для развития интереса к предмету в рамках урочной и внеурочной деятельности.
<p>ПК-3.2 Использует образовательный потенциал социокультурной среды региона в преподавании (предмета по профилю) в учебной и во внеурочной деятельности.</p>	<p>Владеть:</p> <ul style="list-style-type: none"> • навыками организации и проведения занятий с использованием возможностей образовательной среды для достижения образовательных результатов и обеспечения качества учебно-воспитательного процесса средствами математики

2 СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Седьмой семестр

Тема 1. Аксиоматическая теория натуральных чисел

1. Формулировка аксиоматической теории натуральных чисел.
2. Свойства сложения и умножения натуральных чисел.
3. Определение и свойства неравенств на \mathbb{N} .
4. Теорема о существовании наименьшего и наибольшего элементов в подмножествах натуральных чисел.
5. Бесконечность множества натуральных чисел.
6. Натуральные кратные и степени, их свойства.
7. Аксиоматика Пеано.
8. Независимость аксиом Пеано.

Тема 2. Аксиоматические теории целых и рациональных чисел

1. Упорядоченные множества и системы.
2. Аксиоматическая теория целых чисел, первичные термины и аксиомы.
3. Свойства целых чисел. Теорема о порядке на \mathbb{Z} .
4. Непротиворечивость аксиоматической теории целых чисел.
5. Аксиоматическая теория рациональных чисел, первичные термины и аксиомы.
6. Свойства рациональных чисел.
7. Теорема о порядке поля рациональных чисел.
8. Плотность поля рациональных чисел.
9. Непротиворечивость аксиоматической теории рациональных чисел.

Тема 3. Аксиоматическая теория действительных чисел. Комплексные числа

1. Аксиоматическая теория действительных чисел первичные термины и аксиомы.
 2. Свойства действительных чисел.
 3. Непротиворечивость аксиоматической теории действительных чисел.
- Комплексные числа и кватернионы
4. Аксиоматическая теория комплексных чисел, первичные термины и аксиомы.
 5. Свойства комплексных чисел.
 6. Теоремы о порядке на \mathbb{C} .
 7. Непротиворечивость аксиоматической теории комплексных чисел.

Содержание работ по дисциплине

Таблица 2

Содержание работы	Виды и формы работы, час					Всего, час	Код компетенции
	Контактная работа						
	Лекции, в т.ч. в форме практической подготовки*	Лабораторные, в т.ч. в форме практической подготовки*	Практические, в т.ч. в форме практической подготовки*	Консультации, в т.ч. в форме практической подготовки*	Самостоятельная работа, в т.ч. в форме практической подготовки*		
Седьмой семестр							
Тема 1. Аксиоматическая теория натуральных чисел	2		2(2)		20	24	УК-1, ПК-1, ПК-3
Тема 2. Аксиоматические теории целых и рациональных чисел	1		2(2)		20	23	УК-1, ПК-1, ПК-3

Тема 3. Аксиоматическая теория действительных чисел. Комплексные числа	1		2		18	21	УК-1, ПК-1, ПК-3
Подготовка к зачету					4	4	УК-1, ПК-1, ПК-3
Итого по дисциплине	4		6(4)		62	72	

* В случае проведения контактной или самостоятельной работы в форме практической подготовки, часы на практическую подготовку указываются в скобках.

3 МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Для успешного освоения дисциплины следует ознакомиться с содержанием разделов и тем по дисциплине (см. п. 2), следовать технологической карте при выполнении самостоятельной работы (табл. 3), использовать рекомендованные ресурсы (п. 4) и выполнять требования внутренних стандартов университета.

4 УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

4.1 Основная учебная литература

1. **Ларин, С.В.** Числовые системы : учебное пособие для пед. вузов : рекомендовано УМО вузов РФ / С. В. Ларин. - Москва : Академия, 2001. - 160 с. - (Высшее образование). - ISBN 5-7695-0823-X

4.2 Дополнительная учебная литература

1. **Тропин, М.П.** Числовые системы : курс лекций для студ. математического факультета : 4 курс / М. П. Тропин ; Новосиб. гос. пед. ун-т. - Новосибирск : НГПУ, 2009. - 119 с. - Библиогр.: с. 113. - URL: <https://icdlib.nspu.ru/views/icdlib/7924/read.php> (дата обращения: 12.05.2022) . - Предм. указ.: с. 114-117. - Текст : электронный

2. **Методическая разработка практических занятий по числовым системам для студентов математического факультета пединститута** / сост. В. Л. Селиванов ; Новосиб. гос. пед. ин-т. - Новосибирск : Изд-во НГПИ, 1990. - 28 с.

4.3 Ресурсы открытого доступа

1. Научная электронная библиотека. URL: www.elibrary.ru
2. Персональные сайты преподавателей. URL: <http://prepod.nspu.ru/>.
3. Единое окно доступа к образовательным ресурсам. URL: <http://window.edu.ru/>

4.4 Технологическая карта самостоятельной работы студента

Таблица 3

Темы дисциплины	Перечень учебно-методического обеспечения (номер источника из п.п. 4.1-4.3)
Задания для самостоятельной работы	
Седьмой семестр	
Тема 1. Аксиоматическая теория натуральных чисел	Основная учебная литература: 1 Дополнительная учебная литература: 1, 2
Составить тест по теме.	
Составить срезовую работу по теме.	
Проработка лекционного материала, основной и дополнительной литературы по теме.	
1. Выясните, удовлетворяет ли множество N' с заданным на нем отношением n' «следовать за n » аксиомам Пеано; укажите, какие аксиомы выполнены, а какие – нет: а) $N' = \{n \in N \mid n \geq 6\}$, $n' = n + 1$; б) $N' = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $1' = 2, 2' = 3, 3' = 4, 4' = 5, 5' = 1, 6' = 6$.	
2. Вычислите: $2 + 3, 2 \cdot 3$.	
3. Пусть $a, b, n \in N$. Докажите справедливость следующих утверждений: а) $a + a = b + b \Rightarrow a = b$;	

- d. Является ли операция \otimes коммутативной?
- e. Дистрибутивна ли операция \otimes относительно операции \oplus ?
- f. Существует ли нейтральный элемент относительно операции \oplus ?
- g. Существует ли нейтральный элемент относительно операции \otimes ?
- h. Рефлексивно ли отношение \sim ?
- i. Симметрично ли отношение \sim ?
- j. Транзитивно ли отношение \sim ?
- k. Является ли отношение \sim отношением порядка? эквивалентности?
- l. Перечислите не менее трёх пар, принадлежащих классу эквивалентности, порожденному парой $\langle 2, 3 \rangle$.
- m. Существует ли среди классов эквивалентных пар элемент, противоположный классу, порожденному парой $\langle 11, 9 \rangle$? Если – да, то найдите его, если – нет, докажите, что он не существует.

Проработка лекционного материала, основной и дополнительной литературы по теме.

Тема 3. Аксиоматическая теория действительных чисел. Комплексные

Основная учебная литература: 1
Дополнительная учебная литература: 1, 2

1. Пусть $F = \{ \{a_n\}_n \mid a_n \in \mathbf{Q}, \{a_n\}_n \text{ – фундаментальная последовательность} \}$. Определим на F операции \oplus , \otimes и отношение \sim . Для любых элементов $\{a_n\}_n, \{b_n\}_n \in F$:

$$\{a_n\}_n \oplus \{b_n\}_n = \{a_n + b_n\}_n,$$

$$\{a_n\}_n \otimes \{b_n\}_n = \{a_n \cdot b_n\}_n,$$

$$\{a_n\}_n \sim \{b_n\}_n \Leftrightarrow \{a_n - b_n\}_n \text{ – нулевая последовательность.}$$

- a. Является ли операция \oplus ассоциативной?
- b. Является ли операция \oplus коммутативной?
- c. Является ли операция \otimes ассоциативной?
- d. Является ли операция \otimes коммутативной?
- e. Дистрибутивна ли операция \otimes относительно операции \oplus ?
- f. Существует ли нейтральный элемент относительно операции \oplus ?
- g. Существует ли нейтральный элемент относительно операции \otimes ?
- h. Рефлексивно ли отношение \sim ?
- i. Симметрично ли отношение \sim ?
- j. Транзитивно ли отношение \sim ?
- k. Является ли отношение \sim отношением порядка? эквивалентности?

2. Рациональными или иррациональными являются числа: $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{6} + \sqrt{2}$; $\sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}} + \sqrt[3]{10 - 6\sqrt{3}}$?

Комплексные числа и кватернионы

1. Пусть $P_3 = \{ \langle a, b \rangle \mid a, b \in \mathbf{R} \}$. Определим на P_3 операции \oplus , \otimes . Для любых элементов $\langle a, b \rangle, \langle c, d \rangle \in P_3$:

$$\langle a, b \rangle \oplus \langle c, d \rangle = \langle a + b, c + d \rangle,$$

$$\langle a, b \rangle \otimes \langle c, d \rangle = \langle ac - bd, ad + bc \rangle.$$

- a) Является ли операция \oplus ассоциативной?
- b) Является ли операция \oplus коммутативной?
- c) Является ли операция \otimes ассоциативной?
- d) Является ли операция \otimes коммутативной?
- e) Дистрибутивна ли операция \otimes относительно операции \oplus ?
- f) Докажите, что существует нейтральный элемент θ относительно операции \oplus .
- g) Докажите, что существует нейтральный элемент e относительно операции \otimes .

- h) Является ли система $\langle P_3, \oplus, \otimes \rangle$ кольцом? полем?
- i) Решите на P_3 уравнение $x^2 \oplus e = \theta$.
- j) Докажите, что для любых элементов $\alpha \neq \theta, \beta \in P_3$ уравнение $\alpha \otimes x = \beta$ разрешимо в P_3 .

Проработка лекционного материала, основной и дополнительной литературы по теме.

4.5 Выполнение курсовой работы (проекта). Курсовая работа по дисциплине не предусмотрена.

5 РЕСУРСЫ, НЕОБХОДИМЫЕ ДЛЯ ОСУЩЕСТВЛЕНИЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА ПО ДИСЦИПЛИНЕ

5.1 Информационные технологии

Образовательный процесс осуществляется с применением локальных и распределенных информационных технологий (таблицы 4, 5).

Локальные информационные технологии

Таблица 4

Группа программных средств	Перечень лицензионного и свободно распространяемого программного обеспечения, в том числе отечественного производства	Аудитория	Реквизиты подтверждающего документа
Офисные программы	LibreOffice	Ауд. №207 «Помещение для самостоятельной работы»	https://ru.libreoffice.org/about-us/license
Операционные системы	Manjaro Linux XFCE & KDE	Ауд. №207 «Помещение для самостоятельной работы»	http://gostrf.com/normadata/1/4293798/4293798256.htm
Научные расчеты	<ul style="list-style-type: none"> • SageMath • Scilab • Maxima • PSPP • Среда статистических вычислений R 	Ауд. №207 «Помещение для самостоятельной работы»	http://gostrf.com/normadata/1/4293798/4293798256.htm
Графические редакторы	GIMP	Ауд. №207 «Помещение для самостоятельной работы»	https://www.gimp.org/about/COPYING

Браузеры (веб-обозреватели)	Firefox	Ауд. №207 «Помещение для самостоятельной работы»	https://rusgpl.ru/
-----------------------------	---------	---	---

Распределенные информационные технологии

Таблица 5

Группа	Наименование
Библиотеки и образовательные ресурсы (в том числе персональные сайты преподавателей КФ ФГБОУ ВО «НГПУ»)	Электронная библиотека НГПУ http://lib.nspu.ru
	Электронная библиотека КФ ФГБОУ ВО «НГПУ» http://lib.kbnspu.ru/
	Персональные сайты преподавателей КФ ФГБОУ ВО «НГПУ» http://prepod.nspu.ru
	Система электронных портфолио студентов НГПУ https://www.nspu.ru/portfolio/

5.2 Материально-техническое обеспечение дисциплины

Таблица 6

Номер и наименование (при наличии) помещения для осуществления образовательной деятельности	Перечень основного оборудования	Адрес места осуществления образовательной деятельности (местоположение согласно лицензии)
Учебная аудитория для проведения учебных занятий лекционного типа		
Лекционный зал № 1	Комплект учебной мебели	632387, Новосибирская обл. г. Куйбышев, ул. Молодежная, дом 7
Лекционный зал № 2	Комплект учебной мебели	632387, Новосибирская обл. г. Куйбышев, ул. Молодежная, дом 7
Большой лекционный зал	Комплект учебной мебели	632387, Новосибирская обл. г. Куйбышев, ул. Молодежная, дом 7
Учебная аудитория для проведения учебных занятий семинарского типа (практические занятия, лабораторные занятия)/ Учебная аудитория для проведения групповых и индивидуальных консультаций/ Учебная аудитория для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации		
Ауд. №102 «Учебная аудитория семинарского типа занятий»	Комплект учебной мебели, Доска аудиторная – 1шт.	632387, Новосибирская обл. г. Куйбышев, ул. Молодежная, дом 7

Ауд. №106 «Учебная аудитория семинарского типа занятий»	Комплект учебной мебели, Доска аудиторная – 1шт.	632387, Новосибирская обл. г. Куйбышев, ул. Молодежная, дом 7
Ауд. №107 «Учебная аудитория семинарского типа занятий»	Комплект учебной мебели, Доска аудиторная – 1шт.	632387, Новосибирская обл. г. Куйбышев, ул. Молодежная, дом 7
Помещение для самостоятельной работы обучающихся		
Ауд. №207 «Помещение для самостоятельной работы»	Комплект учебной мебели. Компьютерное оборудование: Компьютеры в комплекте (с выходом в сеть "Интернет" и доступом к электронной информационно-образовательной среде университета) – 8 шт., Печатное и сканирующее оборудование: принтеры –1шт.	632387, Новосибирская обл. г. Куйбышев, ул. Молодежная, дом 7
Помещение для хранения и профилактического обслуживания учебного оборудования		
Ауд. №217А «Помещение для хранения и профилактического обслуживания оборудования»	Инвентарь: Тестер компьютерный – 1 шт. Специализированный инвентарь – 1шт. Набор инструментов для оргтехники – 1 шт (28 предметов). Измерительное оборудование: Вольтметры – 1шт., Мультиметр – 1шт., Компьютерное оборудование: Компьютер в комплекте – 1шт. Печатное оборудование: – 1шт.	632387, Новосибирская обл. г. Куйбышев, ул. Молодежная, дом 7

6 ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

6.1 Оценочные материалы для проведения текущего контроля успеваемости

Таблица 7

№ п/п	Наименование темы	Код компетенции	Формы проверки
Седьмой семестр			
1	Тема 1. Аксиоматическая теория натуральных чисел	УК-1, ПК-1, ПК-3	1. Математический диктант 2. Срезовые работы.
2	Тема 2. Аксиоматические теории целых и рациональных чисел	УК-1, ПК-1, ПК-3	1. Математический диктант. 2. Срезовые работы.
3	Тема 3. Аксиоматическая теория действительных чисел. Комплексные числа	УК-1, ПК-1, ПК-3	1. Математический диктант

6.2 Оценочные материалы для проведения промежуточной аттестации обучающихся

Таблица 8

Оценочные материалы для промежуточной аттестации	
Седьмой семестр (Зачет)	
Код компетенции: УК-1	
<ol style="list-style-type: none">1. Формулировка аксиоматической теории натуральных чисел.2. Свойства сложения и умножения натуральных чисел.3. Определение и свойства неравенств на \mathbb{N}.4. Теорема о существовании наименьшего и наибольшего элементов в подмножествах натуральных чисел.5. Бесконечность множества натуральных чисел.6. Натуральные кратные и степени, их свойства.7. Аксиоматика Пеано.8. Независимость аксиом Пеано.9. Аксиоматическая теория целых чисел, первичные термины и аксиомы.10. Свойства целых чисел. Теорема о порядке на \mathbb{Z}.11. Непротиворечивость аксиоматической теории целых чисел.12. Аксиоматическая теория рациональных чисел, первичные термины и аксиомы.13. Свойства рациональных чисел.14. Теорема о порядке поля рациональных чисел.15. Непротиворечивость аксиоматической теории рациональных чисел.16. Аксиоматическая теория действительных чисел первичные термины и аксиомы.17. Свойства действительных чисел.18. Непротиворечивость аксиоматической теории действительных чисел.19. Аксиоматическая теория комплексных чисел, первичные термины и аксиомы.20. Свойства комплексных чисел.21. Непротиворечивость аксиоматической теории комплексных чисел.22. Типовые задачи	

Задания для типовых контрольных работ

Аксноматическая теория натуральных чисел

1. Выясните, удовлетворяет ли множество N' с заданным на нем отношением n' «следовать за n » аксиомам Пеано, укажите, какие аксиомы выполнены, а какие – нет:

a) $N' = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 6\}$, $n' = n + 1$; б) $N' = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $1' = 2, 2' = 3, 3' = 4, 4' = 5, 5' = 1, 6' = 6$.

2. Вычислите: $2 + 3, 2 \cdot 3$.

3. Пусть $a, b, n \in \mathbb{N}$. Докажите справедливость следующих утверждений:

a) $a + a = b + b \Rightarrow a = b$; б) $n > 1 \Rightarrow \exists(x \in \mathbb{N}) : n = 2x \vee n = 2x + 1$; в) $a > 2 \Rightarrow \exists(k \in \mathbb{N}) : a = 3k \vee a = 3k + 1 \vee a = 3k + 2$;

д) $n \neq 1 \Rightarrow \exists(x \in \mathbb{N}) : (n - 1) \cdot n = x + x$; е) $n \neq 1 \Rightarrow \exists(x \in \mathbb{N}) : (n - 1) \cdot n \cdot (n + 1) = 3x$.

4. Решите на множестве натуральных чисел уравнения:

a) $x^2 = 2$;

д) $xy = 1$;

г) $4x = 4y + 1$;

Аксноматические теории целых и рациональных чисел

1. Пусть $P_1 = \{(m, n) \mid m, n \in \mathbb{N}\}$. Определим на P_1 операции \oplus, \otimes и отношение \sim . Для любых элементов $(m, n), (k, l) \in P_1$:

$$(m, n) \oplus (k, l) = (m + k, n + l), (m, n) \otimes (k, l) = (mk + nl, ml + nk), (m, n) \sim (k, l) \Leftrightarrow m + l = k + n.$$

a. Является ли операция \oplus, \otimes ассоциативной, коммутативной?

b. Дистрибутивна ли операция \otimes относительно операции \oplus ?

c. Существует ли нейтральный элемент относительно операции \oplus, \otimes ? Является ли система (P_1, \oplus, \otimes) кольцом?

d. Рефлексивно, симметрично, транзитивно ли отношение \sim ?

e. Является ли отношение \sim отношением порядка? эквивалентности?

f. Перечислите не менее трёх пар, принадлежащих классу эквивалентности, порожденному парой $(2, 3)$.

2. Решите на множестве целых чисел уравнения:

a) $x^2 = 2$;

д) $xy = 1$;

г) $4x = 4y + 1$;

3. Пусть $P_2 = \{(a, n) \mid a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$. Определим на P_2 операции \oplus, \otimes и отношение \sim . Для любых элементов $(a, n), (b, m) \in P_2$:

$$(a, n) \oplus (b, m) = (am + bn, mn), (a, n) \otimes (b, m) = (ab, mn), (a, n) \sim (b, m) \Leftrightarrow am = bn.$$

a. Является ли операция \oplus, \otimes ассоциативной, коммутативной.

b. Дистрибутивна ли операция \otimes относительно операции \oplus ?

c. Существует ли нейтральный элемент относительно операции \oplus, \otimes ?

d. Рефлексивно, симметрично, транзитивно ли отношение \sim ?

e. Является ли отношение \sim отношением порядка? эквивалентности?

f. Перечислите не менее трёх пар, принадлежащих классу эквивалентности, порожденному парой $(2, 3)$.

Аксноматическая теория действительных чисел

1. Пусть $F = \{\{a_n\}_n \mid a_n \in \mathbb{Q}, \{a_n\}_n - \text{фундаментальная последовательность}\}$. Определим на F операции \oplus, \otimes и отношение \sim . Для любых элементов $\{a_n\}_n, \{b_n\}_n \in F$:

$$\{a_n\}_n \oplus \{b_n\}_n = \{a_n + b_n\}_n, \{a_n\}_n \otimes \{b_n\}_n = \{a_n \cdot b_n\}_n, \{a_n\}_n \sim \{b_n\}_n \Leftrightarrow \{a_n - b_n\}_n - \text{нулевая последовательность.}$$

a. Является ли операция \oplus ассоциативной?

b. Является ли операция \oplus коммутативной?

c. Является ли операция \otimes ассоциативной?

d. Является ли операция \otimes коммутативной?

e. Дистрибутивна ли операция \otimes относительно операции \oplus ?

f. Существует ли нейтральный элемент относительно операции \oplus ?

g. Существует ли нейтральный элемент относительно операции \otimes ?

h. Рефлексивно ли отношение \sim ?

i. Симметрично ли отношение \sim ?

j. Транзитивно ли отношение \sim ?

k. Является ли отношение \sim отношением порядка? эквивалентности?

2. Рациональными или иррациональными являются числа: $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{6} + \sqrt{2}$; $\sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}} + \sqrt[3]{10 - 6\sqrt{3}}$?

Комплексные числа и кватернионы

1. Пусть $P_3 = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$. Определим на P_3 операции \oplus, \otimes . Для любых элементов $(a, b), (c, d) \in P_3$:

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a + b, c + d),$$

$$(a, b) \otimes (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

a) Является ли операция \oplus ассоциативной?

b) Является ли операция \oplus коммутативной?

c) Является ли операция \otimes ассоциативной?

d) Является ли операция \otimes коммутативной?

e) Дистрибутивна ли операция \otimes относительно операции \oplus ?

f) Докажите, что существует нейтральный элемент θ относительно операции \oplus .

g) Докажите, что существует нейтральный элемент e относительно операции \otimes .

h) Является ли система (P_3, \oplus, \otimes) кольцом? полем?

i) Решите на P_3 уравнение $x^2 \oplus e = \theta$.

j) Докажите, что для любых элементов $\alpha \neq \theta, \beta \in P_3$ уравнение $\alpha \otimes x = \beta$ разрешимо в P_3 .

2. Для кватернионов $\alpha = 2i + 3k$ и $\beta = 4j - 5k$ найдите: $\alpha - \beta$; $\alpha \cdot \beta$; $\alpha^2 + \beta^2$; $2\alpha - \beta - 1$.

Код компетенции: ПК-1

1. Формулировка аксиоматической теории натуральных чисел.
2. Свойства сложения и умножения натуральных чисел.
3. Определение и свойства неравенств на \mathbb{N} .
4. Теорема о существовании наименьшего и наибольшего элементов в подмножествах натуральных чисел.
5. Бесконечность множества натуральных чисел.
6. Натуральные кратные и степени, их свойства.
7. Аксиоматика Пеано.
8. Независимость аксиом Пеано.
9. Аксиоматическая теория целых чисел, первичные термины и аксиомы.
10. Свойства целых чисел. Теорема о порядке на \mathbb{Z} .
11. Непротиворечивость аксиоматической теории целых чисел.
12. Аксиоматическая теория рациональных чисел, первичные термины и аксиомы.
13. Свойства рациональных чисел.
14. Теорема о порядке поля рациональных чисел.
15. Непротиворечивость аксиоматической теории рациональных чисел.
16. Аксиоматическая теория действительных чисел первичные термины и аксиомы.
17. Свойства действительных чисел.
18. Непротиворечивость аксиоматической теории действительных чисел.
19. Аксиоматическая теория комплексных чисел, первичные термины и аксиомы.
20. Свойства комплексных чисел.
21. Непротиворечивость аксиоматической теории комплексных чисел.

Код компетенции: ПК-3

1. Формулировка аксиоматической теории натуральных чисел.
2. Свойства сложения и умножения натуральных чисел.
3. Определение и свойства неравенств на \mathbb{N} .
4. Теорема о существовании наименьшего и наибольшего элементов в подмножествах натуральных чисел.
5. Бесконечность множества натуральных чисел.
6. Натуральные кратные и степени, их свойства.
7. Аксиоматика Пеано.
8. Независимость аксиом Пеано.
9. Аксиоматическая теория целых чисел, первичные термины и аксиомы.
10. Свойства целых чисел. Теорема о порядке на \mathbb{Z} .
11. Непротиворечивость аксиоматической теории целых чисел.
12. Аксиоматическая теория рациональных чисел, первичные термины и аксиомы.
13. Свойства рациональных чисел.
14. Теорема о порядке поля рациональных чисел.
15. Непротиворечивость аксиоматической теории рациональных чисел.

16. Аксиоматическая теория действительных чисел первичные термины и аксиомы.
17. Свойства действительных чисел.
18. Непротиворечивость аксиоматической теории действительных чисел.
19. Аксиоматическая теория комплексных чисел, первичные термины и аксиомы.
20. Свойства комплексных чисел.
21. Непротиворечивость аксиоматической теории комплексных чисел.

Критерии выставления отметок

Отметка «отлично» / «зачтено» (высокий уровень сформированности компетенций (-ии)) выставляется обучающемуся, который в процессе изучения дисциплины и по результатам промежуточной аттестации, обнаружил системные знания по всем разделам программы дисциплины / модуля / практики, продемонстрировал способность к их самостоятельному пополнению, в том числе в рамках учебно-исследовательской и научно-исследовательской деятельности; при выполнении заданий, предусмотренных программой, успешно продемонстрировал осваиваемые в рамках дисциплины / модуля / практики профессиональные умения; представил результаты выполнения всех заданий для самостоятельной работы полностью и качественно, на творческом уровне, выразил личностную значимость деятельности; при устном ответе высказал самостоятельное суждение на основе исследования теоретических источников, логично и аргументированно изложил материал, связал теорию с практикой посредством иллюстрирующих примеров, свободно ответил на дополнительные вопросы; при выполнении письменного задания представил содержательный, структурированный, глубокий анализ сути и путей решения проблемы (задачи, задания); при выполнении тестовых заданий дал правильные ответы на 85 – 100 % заданий.

Отметка «хорошо» / «зачтено» (средний уровень сформированности компетенций (-ии)) выставляется обучающемуся, который в процессе изучения дисциплины и по результатам промежуточной аттестации, обнаружил знание основного материала по всем разделам программы дисциплины / модуля / практики в объеме, необходимом для дальнейшей учебы и предстоящей работы по профессии, продемонстрировал способность к их самостоятельному пополнению; при выполнении заданий, предусмотренных программой, смог продемонстрировать осваиваемые профессиональные умения, но допустил не принципиальные ошибки в их выполнении, которые смог исправить при незначительной помощи преподавателя; представил результаты выполнения всех заданий для самостоятельной работы, указанных в программе дисциплины / модуля / практики, при этом задания выполнены полностью и качественно; при устном ответе объяснил учебный материал, интерпретировал содержание, экстраполировал выводы; при выполнении письменного задания представил репродуктивную позицию элементы анализа в описании сути и путей решения проблемы (задачи, задания), изложил логическую последовательность вопросов темы; при выполнении тестовых заданий дал правильные ответы на 75 – 84 % заданий.

Отметка «удовлетворительно» / «зачтено» (пороговый уровень сформированности компетенций (-ии)) выставляется обучающемуся, который в процессе изучения дисциплины и по результатам промежуточной аттестации, обнаружил знание основного материала по всем разделам программы дисциплины / модуля / практики в объеме, необходимом для дальнейшей учебы и предстоящей работы по профессии, но знания имеют пробелы и плохо структурированы; при выполнении заданий, предусмотренных программой, в целом смог продемонстрировать осваиваемые профессиональные умения, но допустил ошибки в их выполнении, которые смог исправить при незначительной помощи преподавателя; представил результаты выполнения всех заданий для самостоятельной работы, указанных в программе дисциплины / модуля / практики, при этом задания выполнены формально, кратко, рефлексия неполная или носит формальный характер, представлено поверхностное описание; при устном ответе продемонстрировал знание базовых положений и ключевых понятий, верно воспроизвел учебное содержание без использования

дополнительного материала; при выполнении письменного задания представил репродуктивную позицию в описании сути и путей решения проблемы (задачи, задания); при выполнении тестовых заданий дал правильные ответы на 60 – 74 % заданий.

Отметка «неудовлетворительно» / «не зачтено» (компетенция(-ии) не сформирована(-ы)) выставляется обучающемуся, который в процессе изучения дисциплины и по результатам промежуточной аттестации, обнаружил отсутствие знаний либо фрагментарные знания по основным разделам программы дисциплины / модуля / практики; при выполнении заданий, предусмотренных программой, не смог продемонстрировать осваиваемые профессиональные умения (допустил принципиальные ошибки в их выполнении, которые не смог исправить при указании на них преподавателем), либо не выполнил задания; не выполнил предусмотренные учебным планом практические, лабораторные задания; не полностью выполнил задания для самостоятельной работы, указанных в программе дисциплины / модуля / практики, либо задания выполнены неверно, очевиден плагиат; при устном ответе допустил фактические ошибки в использовании научной терминологии и изложении учебного содержания, сделал ложные выводы; при выполнении тестовых заданий дал правильные ответы на 0 – 59 % заданий.