



МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Куйбышевский филиал федерального государственного бюджетного
образовательного учреждения высшего образования «Новосибирский
государственный педагогический университет»**

УТВЕРЖДАЮ

Декан

Факультета психолого-педагогического
образования

(подпись)

Е.А.Завершинская

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Числовые системы

Направление подготовки:

44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)

Направленность (профиль):

Математика и Информатика

Уровень высшего образования:

бакалавриат

Форма обучения:

очная

СОСТАВИТЕЛИ:

Кандидат педагогических наук, доцент, доцент кафедры математики, информатики и методики преподавания О.А.Тарасова

РЕКОМЕНДОВАНО К ИСПОЛЬЗОВАНИЮ В УЧЕБНОМ ПРОЦЕССЕ

на заседании Ученого совета КФ ФГБОУ ВО «НГПУ» (протокол №9 от 22.04.2025 г.)

1 ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

1.1 Цель освоения дисциплины:

перевести интуитивные знания о числах (натуральных, целых, рациональных, действительных и др.) на твердую основу доказательств, опирающихся на аксиомы, дать обоснование школьного материала, касающегося построения числовых систем.

1.2 Место дисциплины в структуре образовательной программы

Программа дисциплины разработана в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки), утвержденным приказом Минобрнауки России от 08.02.2021 г. №125, профессиональным стандартом: педагог (педагогическая деятельность в сфере дошкольного, начального общего, основного общего, среднего общего образования) (воспитатель, учитель), утвержденным приказом Министерства труда и социальной защиты Российской Федерации от 18.10.2013 г. №544н.

Дисциплина относится к обязательной части блока 1 «Дисциплины» учебного плана образовательной программы, изучается в 5 семестре. Трудоемкость дисциплины: 2 ЗЕ / 72 часа, в том числе 20 часов - контактная работа с преподавателем, 52 часа - самостоятельная работа (таблица 2).

1.3 Планируемые результаты обучения по дисциплине

Дисциплина направлена на формирование компетенции(-ий), представленных в таблице 1.

Таблица 1

Планируемые результаты обучения по дисциплине

Код и наименование компетенции	
Индикаторы достижения компетенции	Планируемые результаты обучения по дисциплине
УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	
УК-1.1 Демонстрирует знание особенностей системного и критического мышления, аргументированно формирует собственное суждение и оценку информации, принимает обоснованное решение.	Знать: методы критического анализа и синтеза информации Уметь: применять системный подход для решения поставленных задач Владеть: навыками рефлексии по поводу собственной и чужой мыслительной деятельности
УК-1.2 Применяет логические формы и процедуры, способен к рефлексии по поводу собственной и чужой мыслительной деятельности.	
УК-1.3 Анализирует источники информации с целью выявления их противоречий и поиска достоверных суждений.	
ПК-1 Способен осваивать и использовать теоретические знания и практические умения и навыки в предметной области при решении профессиональных задач	
ПК-1.1 Знает структуру, состав и дидактические единицы предметной области (преподаваемого предмета).	Знать: • роль и место математики в общей картине научного знания; • структуру, состав и дидактические единицы содержания школьного курса математики.

ПК-1.2 Умеет осуществлять отбор учебного содержания для его реализации в различных формах обучения в соответствии с требованиями ФГОС ОО.	Уметь: осуществлять отбор учебного содержания для его реализации в различных формах обучения в соответствии с современными требованиями к образованию. Владеть: • действием проектирования различных форм учебных занятий, • навыком применения различных методов, приемов и технологий в обучении математике.
ПК-1.3 Демонстрирует умение разрабатывать различные формы учебных занятий, применять методы, приемы и технологии обучения, в том числе информационные.	• действием проектирования различных форм учебных занятий, • навыком применения различных методов, приемов и технологий в обучении математике.
ПК-3 Способен формировать развивающую образовательную среду для достижения личностных, предметных и метапредметных результатов обучения средствами преподаваемых учебных предметов	
ПК-3.1 Владеет способами интеграции учебных предметов для организации развивающей учебной деятельности (исследовательской, проектной, групповой и др.).	Знать: • характеристику личностных, предметных и метапредметных результатов в контексте обучения математике; • особенности интеграции учебных предметов для организации разных способов учебной деятельности. Уметь: • оказывать педагогическую поддержку обучающимся в зависимости от их образовательных результатов; • организовывать учебный процесс с использованием возможностей образовательной среды для развития интереса к предмету в рамках урочной и внеурочной деятельности.
ПК-3.2 Использует образовательный потенциал социокультурной среды региона в преподавании (предмета по профилю) в учебной и во внеурочной деятельности.	Владеть: • навыками организации и проведения занятий с использованием возможностей образовательной среды для достижения образовательных результатов и обеспечения качества учебно-воспитательного процесса средствами математики.

2 СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Пятый семестр

Тема 1. Аксиоматическая теория натуральных чисел

1. Формулировка аксиоматической теории натуральных чисел.
2. Свойства сложения и умножения натуральных чисел.
3. Определение и свойства неравенств на $\mathbb{N}$.
4. Теорема о существовании наименьшего и наибольшего элементов в подмножествах натуральных чисел.
5. Бесконечность множества натуральных чисел.
6. Натуральные кратные и степени, их свойства.
7. Аксиоматика Пеано.
8. Независимость аксиом Пеано.

Тема 2. Аксиоматические теории целых и рациональных чисел

1. Упорядоченные множества и системы.
2. Аксиоматическая теория целых чисел, первичные термины и аксиомы.
3. Свойства целых чисел. Теорема о порядке на $\mathbb{Z}$.
4. Непротиворечивость аксиоматической теории целых чисел.
5. Аксиоматическая теория рациональных чисел, первичные термины и аксиомы.
6. Свойства рациональных чисел.
7. Теорема о порядке поля рациональных чисел.
8. Плотность поля рациональных чисел.
9. Непротиворечивость аксиоматической теории рациональных чисел.

Тема 3. Аксиоматическая теория действительных чисел. Комплексные числа

1. Аксиоматическая теория действительных чисел первичные термины и аксиомы.
 2. Свойства действительных чисел.
 3. Непротиворечивость аксиоматической теории действительных чисел.
- Комплексные числа и кватернионы
4. Аксиоматическая теория комплексных чисел, первичные термины и аксиомы.
 5. Свойства комплексных чисел.
 6. Теоремы о порядке на $\mathbb{C}$.
 7. Непротиворечивость аксиоматической теории комплексных чисел.

Содержание работ по дисциплине

Таблица 2

Содержание работы	Виды и формы работы, час				Всего, час	Код компетенции
	Контактная работа					
	Лекции, в т.ч. в форме практической подготовки*	Лабораторные, в т.ч. в форме практической подготовки*	Практические, в т.ч. в форме практической подготовки*	Консультации, в т.ч. в форме практической подготовки*		
					Самостоятельная работа, в т.ч. в форме практической подготовки*	
Пятый семестр						
Тема 1. Аксиоматическая теория натуральных чисел	4		4(2)		20	28
Тема 2. Аксиоматические теории целых и рациональных чисел	2		4(2)		18	24
						УК-1, ПК-1, ПК-3
						УК-1, ПК-1, ПК-3

Тема 3. Аксиоматическая теория действительных чисел. Комплексные числа	2		4		14	20	УК-1, ПК-1, ПК-3
Подготовка к зачету							УК-1, ПК-1, ПК-3
Итого по дисциплине	8		12(4)		52	72	

* В случае проведения контактной или самостоятельной работы в форме практической подготовки, часы на практическую подготовку указываются в скобках.

3 МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ

Для успешного освоения дисциплины следует ознакомиться с содержанием разделов и тем по дисциплине (см. п. 2), следовать технологической карте при выполнении самостоятельной работы (табл. 3), использовать рекомендованные ресурсы (п. 4) и выполнять требования внутренних стандартов университета.

4 УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

4.1 Основная учебная литература

1. **Ларин, С.В.** Числовые системы : учебное пособие для пед. вузов : рекомендовано УМО вузов РФ / С. В. Ларин. - Москва : Академия, 2001. - 160 с. - (Высшее образование). - ISBN 5-7695-0823-X

4.2 Дополнительная учебная литература

1. **Тропин, М.П.** Числовые системы : курс лекций для студ. математического факультета : 4 курс / М. П. Тропин ; Новосиб. гос. пед. ун-т. - Новосибирск : НГПУ, 2009. - 119 с. - Библиогр.: с. 113. - URL: <https://icdlib.nspu.ru/views/icdlib/7924/read.php> (дата обращения: 12.05.2022) . - Предм. указ.: с. 114-117. - Текст : электронный

2. **Методическая разработка практических занятий по числовым системам для студентов математического факультета пединститута** / сост. В. Л. Селиванов ; Новосиб. гос. пед. ин-т. - Новосибирск : Изд-во НГПИ, 1990. - 28 с.

4.3 Ресурсы открытого доступа

1. Научная электронная библиотека. URL: www.elibrary.ru
2. Персональные сайты преподавателей. URL: <http://prepod.nspu.ru/>.
3. Единое окно доступа к образовательным ресурсам. URL: <http://window.edu.ru/>

4.4 Технологическая карта самостоятельной работы студента

Таблица 3

Темы дисциплины	Перечень учебно-методического обеспечения (номер источника из п.п. 4.1-4.3)
Задания для самостоятельной работы	
Пятый семестр	
Тема 1. Аксиоматическая теория натуральных чисел	Основная учебная литература: 1 Дополнительная учебная литература: 1, 2
Составить тест по теме.	
Составить срезовую работу по теме.	
Проработка лекционного материала, основной и дополнительной литературы по теме.	
1. Выясните, удовлетворяет ли множество N' с заданным на нем отношением n' «следовать за n» аксиомам Пеано; укажите, какие аксиомы выполнены, а какие – нет: а) $N' = \{n \in N \mid n \geq 6\}$, $n' = n + 1$; б) $N' = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $1' = 2, 2' = 3, 3' = 4, 4' = 5, 5' = 1, 6' = 6$. 2. Вычислите: $2 + 3$, $2 \cdot 3$. 3. Пусть $a, b, n \in N$. Докажите справедливость следующих утверждений: а) $a + a = b + b \Rightarrow a = b$;	

b) $n > 1 \Rightarrow \exists (x \in \mathbb{N}) : n = 2x \vee n = 2x + 1;$ c) $a > 2 \Rightarrow \exists (k \in \mathbb{N}) : a = 3k \vee a = 3k + 1 \vee a = 3k + 2;$ d) $n \neq 1 \Rightarrow \exists (x \in \mathbb{N}) : (n - 1) \cdot n = x + x;$ e) $n \neq 1 \Rightarrow \exists (x \in \mathbb{N}) : (n - 1) \cdot n \cdot (n + 1) = 3x.$		
4. Решите на множестве натуральных чисел уравнения:		
a) $x^2 = 2;$	d) $xy = 1;$	g) $4x = 4y + 1;$
b) $x^2 = x;$	e) $xy = x;$	h) $2n + 1 = 2x;$
c) $3a = a^2;$	f) $x^2y = 4;$	i) $x^2 + y^2 = 5.$
Тема 2. Аксиоматические теории целых и рациональных чисел		Основная учебная литература: 1 Дополнительная учебная литература: 1, 2
1. Пусть $P_1 = \{\langle m, n \rangle \mid m, n \in \mathbb{N}\}$. Определим на P_1 операции $\oplus$, $\otimes$ и отношение $\sim$. Для любых элементов $\langle m, n \rangle, \langle k, l \rangle \in P_1$: $\langle m, n \rangle \oplus \langle k, l \rangle = \langle m + k, n + l \rangle,$ $\langle m, n \rangle \otimes \langle k, l \rangle = \langle mk + nl, ml + nk \rangle,$ $\langle m, n \rangle \sim \langle k, l \rangle \Leftrightarrow m + l = k + n.$		
а. Является ли операция $\oplus$ ассоциативной? б. Является ли операция $\oplus$ коммутативной? в. Является ли операция $\otimes$ ассоциативной? г. Является ли операция $\otimes$ коммутативной? д. Дистрибутивна ли операция $\otimes$ относительно операции $\oplus$? е. Существует ли нейтральный элемент относительно операции $\oplus$? Является ли система $\langle P_1, \oplus, \otimes \rangle$ кольцом? ж. Существует ли нейтральный элемент относительно операции $\otimes$? з. Рефлексивно ли отношение $\sim$? и. Симметрично ли отношение $\sim$? й. Транзитивно ли отношение $\sim$? к. Является ли отношение $\sim$ отношением порядка? эквивалентности? л. Перечислите не менее трёх пар, принадлежащих классу эквивалентности, порожденному парой $\langle 2, 3 \rangle$. м. Существует ли среди классов эквивалентных пар элемент, противоположный классу, порожденному парой $\langle 11, 9 \rangle$? Если – да, то найдите его, если – нет, докажите, что он не существует.		
2. Решите на множестве целых чисел уравнения:		
a) $x^2 = 2;$	d) $xy = 1;$	g) $4x = 4y + 1;$
b) $x^2 = x;$	e) $xy = x;$	h) $2n + 1 = 2x;$
c) $3a = a^2;$	f) $x^2y = 4;$	i) $x^2 + y^2 = 5.$
3. Пусть $P_2 = \{\langle a, n \rangle \mid a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$. Определим на P_2 операции $\oplus$, $\otimes$ и отношение $\sim$. Для любых элементов $\langle a, n \rangle, \langle b, m \rangle \in P_2$: $\langle a, n \rangle \oplus \langle b, m \rangle = \langle am + bn, mn \rangle,$ $\langle a, n \rangle \otimes \langle b, m \rangle = \langle ab, mn \rangle,$ $\langle a, n \rangle \sim \langle b, m \rangle \Leftrightarrow am = bn.$		
а. Является ли операция $\oplus$ ассоциативной? б. Является ли операция $\oplus$ коммутативной? в. Является ли операция $\otimes$ ассоциативной?		

d. Является ли операция $\otimes$ коммутативной? e. Дистрибутивна ли операция $\otimes$ относительно операции $\oplus$? f. Существует ли нейтральный элемент относительно операции $\oplus$? g. Существует ли нейтральный элемент относительно операции $\otimes$? h. Рефлексивно ли отношение $\sim$? i. Симметрично ли отношение $\sim$? j. Транзитивно ли отношение $\sim$? k. Является ли отношение $\sim$ отношением порядка? эквивалентности? l. Перечислите не менее трёх пар, принадлежащих классу эквивалентности, порожденному парой $\langle 2, 3 \rangle$. m. Существует ли среди классов эквивалентных пар элемент, противоположный классу, порожденному парой $\langle 11, 9 \rangle$? Если – да, то найдите его, если – нет, докажите, что он не существует.	
Проработка лекционного материала, основной и дополнительной литературы по теме.	
Тема 3. Аксиоматическая теория действительных чисел. Комплексные	Основная учебная литература: 1 Дополнительная учебная литература: 1, 2
1. Пусть $F = \{\{a_n\}_n \mid a_n \in \mathbf{Q}, \{a_n\}_n \text{ — фундаментальная последовательность}\}$. Определим на F операции $\oplus$, $\otimes$ и отношение $\sim$. Для любых элементов $\{a_n\}_n, \{b_n\}_n \in F$: $\{a_n\}_n \oplus \{b_n\}_n = \{a_n + b_n\}_n$, $\{a_n\}_n \otimes \{b_n\}_n = \{a_n \cdot b_n\}_n$, $\{a_n\}_n \sim \{b_n\}_n \Leftrightarrow \{a_n - b_n\}_n \text{ — нулевая последовательность.}$ a. Является ли операция $\oplus$ ассоциативной? b. Является ли операция $\oplus$ коммутативной? c. Является ли операция $\otimes$ ассоциативной? d. Является ли операция $\otimes$ коммутативной? e. Дистрибутивна ли операция $\otimes$ относительно операции $\oplus$? f. Существует ли нейтральный элемент относительно операции $\oplus$? g. Существует ли нейтральный элемент относительно операции $\otimes$? h. Рефлексивно ли отношение $\sim$? i. Симметрично ли отношение $\sim$? j. Транзитивно ли отношение $\sim$? k. Является ли отношение $\sim$ отношением порядка? эквивалентности? 2. Рациональными или иррациональными являются числа: $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{6} + \sqrt{2}$; $\sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}} + \sqrt[3]{10 - 6\sqrt{3}}$? Комплексные числа и кватернионы 1. Пусть $P_3 = \{\langle a, b \rangle \mid a, b \in \mathbf{R}\}$. Определим на P_3 операции $\oplus$, $\otimes$. Для любых элементов $\langle a, b \rangle, \langle c, d \rangle \in P_3$: $\langle a, b \rangle \oplus \langle c, d \rangle = \langle a + b, c + d \rangle$, $\langle a, b \rangle \otimes \langle c, d \rangle = \langle ac - bd, ad + bc \rangle$. a) Является ли операция $\oplus$ ассоциативной? b) Является ли операция $\oplus$ коммутативной? c) Является ли операция $\otimes$ ассоциативной? d) Является ли операция $\otimes$ коммутативной? e) Дистрибутивна ли операция $\otimes$ относительно операции $\oplus$? f) Докажите, что существует нейтральный элемент θ относительно операции $\oplus$. g) Докажите, что существует нейтральный элемент e относительно операции $\otimes$.	

h) Является ли система $\langle P_3, \oplus, \otimes \rangle$ кольцом? полем?
i) Решите на P_3 уравнение $x^2 \oplus e = \theta$.
j) Докажите, что для любых элементов $\alpha \neq \theta, \beta \in P_3$ уравнение $\alpha \otimes x = \beta$ разрешимо в P_3 .
Проработка лекционного материала, основной и дополнительной литературы по теме.

4.5 Выполнение курсовой работы (проекта). Курсовая работа по дисциплине не предусмотрена.

5 РЕСУРСЫ, НЕОБХОДИМЫЕ ДЛЯ ОСУЩЕСТВЛЕНИЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА ПО ДИСЦИПЛИНЕ

5.1 Информационные технологии

Образовательный процесс осуществляется с применением локальных и распределенных информационных технологий (таблицы 4, 5).

Локальные информационные технологии

Таблица 4

Группа программных средств	Перечень лицензионного и свободно распространяемого программного обеспечения, в том числе отечественного производства	Аудитория	Реквизиты подтверждающего документа
Офисные программы	LibreOffice	Ауд. №207 «Помещение для самостоятельной работы»	https://ru.libreoffice.org/about-us/license
Операционные системы	Manjaro Linux XFCE & KDE	Ауд. №207 «Помещение для самостоятельной работы»	http://gostrf.com/normadata/1/4293798/4293798256.htm
Научные расчеты	• SageMath • Scilab • Maxima • PSPP • Среда статистических вычислений R	Ауд. №207 «Помещение для самостоятельной работы»	http://gostrf.com/normadata/1/4293798/4293798256.htm
Графические редакторы	GIMP	Ауд. №207 «Помещение для самостоятельной работы»	https://www.gimp.org/about/COPYING

Браузеры (веб-обозреватели)	Firefox	Ауд. №207 «Помещение для самостоятельной работы»	https://rusgpl.ru/
-----------------------------	---------	---	---

Распределенные информационные технологии

Таблица 5

Группа	Наименование
Библиотеки и образовательные ресурсы (в том числе персональные сайты преподавателей КФ ФГБОУ ВО «НГПУ»)	Электронная библиотека НГПУ http://lib.nspu.ru
	Электронная библиотека КФ ФГБОУ ВО «НГПУ» http://lib.kbnspu.ru/
	Персональные сайты преподавателей КФ ФГБОУ ВО «НГПУ» http://prepod.nspu.ru
	Система электронных портфолио студентов НГПУ https://www.nspu.ru/portfolio/

5.2 Материально-техническое обеспечение дисциплины

Таблица 6

Номер и наименование (при наличии) помещения для осуществления образовательной деятельности	Перечень основного оборудования	Адрес места осуществления образовательной деятельности (местоположение согласно лицензии)
Учебная аудитория для проведения учебных занятий лекционного типа		
Лекционный зал № 1	Комплект учебной мебели	632387, Новосибирская обл. г. Куйбышев, ул. Молодежная, дом 7
Лекционный зал № 2	Комплект учебной мебели	632387, Новосибирская обл. г. Куйбышев, ул. Молодежная, дом 7
Большой лекционный зал	Комплект учебной мебели	632387, Новосибирская обл. г. Куйбышев, ул. Молодежная, дом 7
Учебная аудитория для проведения учебных занятий семинарского типа (практические занятия, лабораторные занятия)/ Учебная аудитория для проведения групповых и индивидуальных консультаций/ Учебная аудитория для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации		
Ауд. №102 «Учебная аудитория семинарского типа занятий»	Комплект учебной мебели, Доска аудиторная – 1шт.	632387, Новосибирская обл. г. Куйбышев, ул. Молодежная, дом 7

Ауд. №106 «Учебная аудитория семинарского типа занятий»	Комплект учебной мебели, Доска аудиторная – 1шт.	632387, Новосибирская обл. г. Куйбышев, ул. Молодежная, дом 7
Ауд. №107 «Учебная аудитория семинарского типа занятий»	Комплект учебной мебели, Доска аудиторная – 1шт.	632387, Новосибирская обл. г. Куйбышев, ул. Молодежная, дом 7
Помещение для самостоятельной работы обучающихся		
Ауд. №207 «Помещение для самостоятельной работы»	Комплект учебной мебели. Компьютерное оборудование: Компьютеры в комплекте (с выходом в сеть "Интернет" и доступом к электронной информационно-образовательной среде университета) – 8 шт., Печатное и сканирующее оборудование: принтеры –1шт.	632387, Новосибирская обл. г. Куйбышев, ул. Молодежная, дом 7
Помещение для хранения и профилактического обслуживания учебного оборудования		
Ауд. №217А «Помещение для хранения и профилактического обслуживания оборудования»	Инвентарь: Тестер компьютерный – 1 шт. Специализированный инвентарь – 1шт. Набор инструментов для оргтехники – 1 шт (28 предметов). Измерительное оборудование: Вольтметры – 1шт., Мультиметр – 1шт., Компьютерное оборудование: Компьютер в комплекте – 1шт. Печатное оборудование: – 1шт.	632387, Новосибирская обл. г. Куйбышев, ул. Молодежная, дом 7

6 ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

6.1 Оценочные материалы для проведения текущего контроля успеваемости

Таблица 7

№ п/п	Наименование темы	Код компетенции	Формы проверки
Пятый семестр			
1	Тема 1. Аксиоматическая теория натуральных чисел	УК-1, ПК-1, ПК-3	1. Математический диктант 2. Срезовая работа.
2	Тема 2. Аксиоматические теории целых и рациональных чисел	УК-1, ПК-1, ПК-3	1. Математический диктант. 2. Срезовая работа.
3	Тема 3. Аксиоматическая теория действительных чисел. Комплексные числа	УК-1, ПК-1, ПК-3	1. Математический диктант. 2. Срезовая работа.

6.2 Оценочные материалы для проведения промежуточной аттестации обучающихся

Таблица 8

Оценочные материалы для промежуточной аттестации	
Пятый семестр (Зачет)	
Код компетенции: УК-1	
1. Формулировка аксиоматической теории натуральных чисел. 2. Свойства сложения и умножения натуральных чисел. 3. Определение и свойства неравенств на $\mathbb{N}$. 4. Теорема о существовании наименьшего и наибольшего элементов в подмножествах натуральных чисел. 5. Бесконечность множества натуральных чисел. 6. Натуральные кратные и степени, их свойства. 7. Аксиоматика Пеано. 8. Независимость аксиом Пеано. 9. Аксиоматическая теория целых чисел, первичные термины и аксиомы. 10. Свойства целых чисел. Теорема о порядке на $\mathbb{Z}$. 11. Непротиворечивость аксиоматической теории целых чисел. 12. Аксиоматическая теория рациональных чисел, первичные термины и аксиомы. 13. Свойства рациональных чисел. 14. Теорема о порядке поля рациональных чисел. 15. Непротиворечивость аксиоматической теории рациональных чисел. 16. Аксиоматическая теория действительных чисел первичные термины и аксиомы. 17. Свойства действительных чисел. 18. Непротиворечивость аксиоматической теории действительных чисел. 19. Аксиоматическая теория комплексных чисел, первичные термины и аксиомы. 20. Свойства комплексных чисел. 21. Непротиворечивость аксиоматической теории комплексных чисел. 22. Типовые задачи	

Задания для типовых контрольных работ

Аксиоматическая теория натуральных чисел

1. Выясните, удовлетворяет ли множество N' с заданным на нем отношением n' «следовать за n » аксиомам Пеано, укажите, какие аксиомы выполнены, а какие – нет:

a) $N' = \{n \in N \mid n \geq 6\}$, $n' = n + 1$; b) $N' = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $1' = 2$, $2' = 3$, $3' = 4$, $4' = 5$, $5' = 1$, $6' = 6$.

2. Вычислите: $2 + 3$, $2 \cdot 3$.

3. Пусть $a, b, n \in N$. Докажите справедливость следующих утверждений:

a) $a + a = b + b \Rightarrow a = b$; b) $n > 1 \Rightarrow \exists(x \in N) : n = 2x \vee n = 2x + 1$; c) $a > 2 \Rightarrow \exists(k \in N) : a = 3k \vee a = 3k + 1 \vee a = 3k + 2$;

d) $n \neq 1 \Rightarrow \exists(x \in N) : (n - 1) \cdot n = x + x$; e) $n \neq 1 \Rightarrow \exists(x \in N) : (n - 1) \cdot n \cdot (n + 1) = 3x$.

4. Решите на множестве натуральных чисел уравнения:

a) $x^2 = 2$;

d) $xy = 1$;

g) $4x = 4y + 1$;

Аксиоматические теории целых и рациональных чисел

1. Пусть $P_1 = \{(m, n) \mid m, n \in N\}$. Определим на P_1 операции $\oplus$, $\otimes$ и отношение $\sim$. Для любых элементов $\langle m, n \rangle$, $\langle k, l \rangle \in P_1$:

$$\langle m, n \rangle \oplus \langle k, l \rangle = \langle m + k, n + l \rangle, \langle m, n \rangle \otimes \langle k, l \rangle = \langle mk + nl, ml + nk \rangle, \langle m, n \rangle \sim \langle k, l \rangle \Leftrightarrow m + l = k + n.$$

a. Является ли операция $\oplus$, $\otimes$ ассоциативной, коммутативной?

b. Дистрибутивна ли операция $\otimes$ относительно операции $\oplus$?

c. Существует ли нейтральный элемент относительно операции $\oplus$, $\otimes$? Является ли система $(P_1, \oplus, \otimes)$ кольцом?

d. Рефлексивно, симметрично, транзитивно ли отношение $\sim$?

e. Является ли отношение $\sim$ отношением порядка? эквивалентности?

f. Перечислите не менее трёх пар, принадлежащих классу эквивалентности, порожденному парой $\langle 2, 3 \rangle$.

2. Решите на множестве целых чисел уравнения:

a) $x^2 = 2$;

d) $xy = 1$;

g) $4x = 4y + 1$;

3. Пусть $P_2 = \{(a, n) \mid a \in Z, n \in N\}$. Определим на P_2 операции $\oplus$, $\otimes$ и отношение $\sim$. Для любых элементов $\langle a, n \rangle$, $\langle b, m \rangle \in P_2$:

$$\langle a, n \rangle \oplus \langle b, m \rangle = \langle am + bn, mn \rangle, \langle a, n \rangle \otimes \langle b, m \rangle = \langle ab, mn \rangle, \langle a, n \rangle \sim \langle b, m \rangle \Leftrightarrow am = bn.$$

a. Является ли операция $\oplus$, $\otimes$ ассоциативной, коммутативной?

b. Дистрибутивна ли операция $\otimes$ относительно операции $\oplus$?

c. Существует ли нейтральный элемент относительно операции $\oplus$, $\otimes$?

d. Рефлексивно, симметрично, транзитивно ли отношение $\sim$?

e. Является ли отношение $\sim$ отношением порядка? эквивалентности?

f. Перечислите не менее трёх пар, принадлежащих классу эквивалентности, порожденному парой $\langle 2, 3 \rangle$.

Аксиоматическая теория действительных чисел

1. Пусть $F = \{\{a_n\}_n \mid a_n \in Q, \{a_n\}_n - \text{фундаментальная последовательность}\}$. Определим на F операции $\oplus$, $\otimes$ и отношение $\sim$. Для любых элементов $\{a_n\}_n, \{b_n\}_n \in F$:

$$\{a_n\}_n \oplus \{b_n\}_n = \{a_n + b_n\}_n, \{a_n\}_n \otimes \{b_n\}_n = \{a_n \cdot b_n\}_n, \{a_n\}_n \sim \{b_n\}_n \Leftrightarrow \{a_n - b_n\}_n - \text{нулевая последовательность.}$$

a. Является ли операция $\oplus$ ассоциативной?

b. Является ли операция $\oplus$ коммутативной?

c. Является ли операция $\otimes$ ассоциативной?

d. Является ли операция $\otimes$ коммутативной?

e. Дистрибутивна ли операция $\otimes$ относительно операции $\oplus$?

f. Существует ли нейтральный элемент относительно операции $\oplus$?

g. Существует ли нейтральный элемент относительно операции $\otimes$?

h. Рефлексивно ли отношение $\sim$?

i. Симметрично ли отношение $\sim$?

j. Транзитивно ли отношение $\sim$?

k. Является ли отношение $\sim$ отношением порядка? эквивалентности?

2. Рациональными или иррациональными являются числа: $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$; $\sqrt{6} + \sqrt{2}$; $\sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}} + \sqrt[3]{10 - 6\sqrt{3}}$?

Комплексные числа и кватернионы

1. Пусть $P_3 = \{(a, b) \mid a, b \in R\}$. Определим на P_3 операции $\oplus$, $\otimes$. Для любых элементов $\langle a, b \rangle$, $\langle c, d \rangle \in P_3$:

$$\langle a, b \rangle \oplus \langle c, d \rangle = \langle a + b, c + d \rangle,$$

$$\langle a, b \rangle \otimes \langle c, d \rangle = \langle ac - bd, ad + bc \rangle.$$

a) Является ли операция $\oplus$ ассоциативной?

b) Является ли операция $\oplus$ коммутативной?

c) Является ли операция $\otimes$ ассоциативной?

d) Является ли операция $\otimes$ коммутативной?

e) Дистрибутивна ли операция $\otimes$ относительно операции $\oplus$?

f) Докажите, что существует нейтральный элемент θ относительно операции $\oplus$.

g) Докажите, что существует нейтральный элемент e относительно операции $\otimes$.

h) Является ли система $(P_3, \oplus, \otimes)$ кольцом? полем?

i) Решите на P_3 уравнение $x^2 \oplus e = \theta$.

j) Докажите, что для любых элементов $\alpha \neq \theta$, $\beta \in P_3$ уравнение $\alpha \otimes x = \beta$ разрешимо в P_3 .

2. Для кватернионов $\alpha = 2i + 3k$ и $\beta = 4j - 5k$ найдите: $\alpha - \beta$; $\alpha \cdot \beta$; $\alpha^2 + \beta^2$; $2\alpha - \beta - 1$.

Код компетенции: ПК-1
1. Формулировка аксиоматической теории натуральных чисел. 2. Свойства сложения и умножения натуральных чисел. 3. Определение и свойства неравенств на $\mathbb{N}$. 4. Теорема о существовании наименьшего и наибольшего элементов в подмножествах натуральных чисел. 5. Бесконечность множества натуральных чисел. 6. Натуральные кратные и степени, их свойства. 7. Аксиоматика Пеано. 8. Независимость аксиом Пеано. 9. Аксиоматическая теория целых чисел, первичные термины и аксиомы. 10. Свойства целых чисел. Теорема о порядке на $\mathbb{Z}$. 11. Непротиворечивость аксиоматической теории целых чисел. 12. Аксиоматическая теория рациональных чисел, первичные термины и аксиомы. 13. Свойства рациональных чисел. 14. Теорема о порядке поля рациональных чисел. 15. Непротиворечивость аксиоматической теории рациональных чисел. 16. Аксиоматическая теория действительных чисел первичные термины и аксиомы. 17. Свойства действительных чисел. 18. Непротиворечивость аксиоматической теории действительных чисел. 19. Аксиоматическая теория комплексных чисел, первичные термины и аксиомы. 20. Свойства комплексных чисел. 21. Непротиворечивость аксиоматической теории комплексных чисел.
Код компетенции: ПК-3
1. Формулировка аксиоматической теории натуральных чисел. 2. Свойства сложения и умножения натуральных чисел. 3. Определение и свойства неравенств на $\mathbb{N}$. 4. Теорема о существовании наименьшего и наибольшего элементов в подмножествах натуральных чисел. 5. Бесконечность множества натуральных чисел. 6. Натуральные кратные и степени, их свойства. 7. Аксиоматика Пеано. 8. Независимость аксиом Пеано. 9. Аксиоматическая теория целых чисел, первичные термины и аксиомы. 10. Свойства целых чисел. Теорема о порядке на $\mathbb{Z}$. 11. Непротиворечивость аксиоматической теории целых чисел. 12. Аксиоматическая теория рациональных чисел, первичные термины и аксиомы. 13. Свойства рациональных чисел. 14. Теорема о порядке поля рациональных чисел. 15. Непротиворечивость аксиоматической теории рациональных чисел.

- | |
|---|
| <ol style="list-style-type: none">16. Аксиоматическая теория действительных чисел первичные термины и аксиомы.17. Свойства действительных чисел.18. Непротиворечивость аксиоматической теории действительных чисел.19. Аксиоматическая теория комплексных чисел, первичные термины и аксиомы.20. Свойства комплексных чисел.21. Непротиворечивость аксиоматической теории комплексных чисел. |
|---|

Критерии выставления отметок

Отметка «отлично» / «зачтено» (высокий уровень сформированности компетенций (-ии)) выставляется обучающемуся, который в процессе изучения дисциплины и по результатам промежуточной аттестации, обнаружил системные знания по всем разделам программы дисциплины / модуля / практики, продемонстрировал способность к их самостоятельному пополнению, в том числе в рамках учебно-исследовательской и научно-исследовательской деятельности; при выполнении заданий, предусмотренных программой, успешно продемонстрировал осваиваемые в рамках дисциплины / модуля / практики профессиональные умения; представил результаты выполнения всех заданий для самостоятельной работы полностью и качественно, на творческом уровне, выразил личностную значимость деятельности; при устном ответе высказал самостоятельное суждение на основе исследования теоретических источников, логично и аргументированно изложил материал, связал теорию с практикой посредством иллюстрирующих примеров, свободно ответил на дополнительные вопросы; при выполнении письменного задания представил содержательный, структурированный, глубокий анализ сути и путей решения проблемы (задачи, задания); при выполнении тестовых заданий дал правильные ответы на 85 – 100 % заданий.

Отметка «хорошо» / «зачтено» (средний уровень сформированности компетенций (-ии)) выставляется обучающемуся, который в процессе изучения дисциплины и по результатам промежуточной аттестации, обнаружил знание основного материала по всем разделам программы дисциплины / модуля / практики в объёме, необходимом для дальнейшей учебы и предстоящей работы по профессии, продемонстрировал способность к их самостоятельному пополнению; при выполнении заданий, предусмотренных программой, смог продемонстрировать осваиваемые профессиональные умения, но допустил не принципиальные ошибки в их выполнении, которые смог исправить при незначительной помощи преподавателя; представил результаты выполнения всех заданий для самостоятельной работы, указанных в программе дисциплины / модуля / практики, при этом задания выполнены полностью и качественно; при устном ответе объяснил учебный материал, интерпретировал содержание, экстраполировал выводы; при выполнении письменного задания представил репродуктивную позицию элементы анализа в описании сути и путей решения проблемы (задачи, задания), изложил логическую последовательность вопросов темы; при выполнении тестовых заданий дал правильные ответы на 75 – 84 % заданий.

Отметка «удовлетворительно» / «зачтено» (пороговый уровень сформированности компетенций (-ии)) выставляется обучающемуся, который в процессе изучения дисциплины и по результатам промежуточной аттестации, обнаружил знание основного материала по всем разделам программы дисциплины / модуля / практики в объёме, необходимом для дальнейшей учебы и предстоящей работы по профессии, но знания имеют пробелы и плохо структурированы; при выполнении заданий, предусмотренных программой, в целом смог продемонстрировать осваиваемые профессиональные умения, но допустил ошибки в их выполнении, которые смог исправить при незначительной помощи преподавателя; представил результаты выполнения всех заданий для самостоятельной работы, указанных в программе дисциплины / модуля / практики, при этом задания выполнены формально, кратко, рефлексия неполная или носит формальный характер, представлено поверхностное описание; при устном ответе продемонстрировал знание базовых положений и ключевых понятий, верно воспроизвел учебное содержание без использования

дополнительного материала; при выполнении письменного задания представил репродуктивную позицию в описании сути и путей решения проблемы (задачи, задания); при выполнении тестовых заданий дал правильные ответы на 60 – 74 % заданий.

Отметка «неудовлетворительно» / «не зачтено» (компетенция(-ии) не сформирована(-ы)) выставляется обучающемуся, который в процессе изучения дисциплины и по результатам промежуточной аттестации, обнаружил отсутствие знаний либо фрагментарные знания по основным разделам программы дисциплины / модуля / практики; при выполнении заданий, предусмотренных программой, не смог продемонстрировать осваиваемые профессиональные умения (допустил принципиальные ошибки в их выполнении, которые не смог исправить при указании на них преподавателем), либо не выполнил задания; не выполнил предусмотренные учебным планом практические, лабораторные задания; не полностью выполнил задания для самостоятельной работы, указанных в программе дисциплины / модуля / практики, либо задания выполнены неверно, очевиден плагиат; при устном ответе допустил фактические ошибки в использовании научной терминологии и изложении учебного содержания, сделал ложные выводы; при выполнении тестовых заданий дал правильные ответы на 0 – 59 % заданий.