



**МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**Куйбышевский филиал федерального государственного бюджетного  
образовательного учреждения высшего образования «Новосибирский  
государственный педагогический университет»**

**УТВЕРЖДАЮ**

Декан  
Факультета психолого-педагогического  
образования

Е.А.Завершинская

(подпись)

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ**  
**Числовые системы**

Направление подготовки:

**44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки)**

Направленность (профиль):

**Математика и Информатика**

Уровень высшего образования:

**бакалавриат**

Форма обучения:

**очная**

**СОСТАВИТЕЛИ:**

Кандидат педагогических наук, доцент, доцент кафедры математики, информатики и методики преподавания О.А.Тарасова

**РЕКОМЕНДОВАНО К ИСПОЛЬЗОВАНИЮ В УЧЕБНОМ ПРОЦЕССЕ**  
на заседании Ученого совета КФ ФГБОУ ВО «НГПУ» (протокол №8 от 28.04.2026 г.)

# 1 ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

## 1.1 Цель освоения дисциплины:

перевести интуитивные знания о числах (натуральных, целых, рациональных, действительных и др.) на твердую основу доказательств, опирающихся на аксиомы, дать обоснование школьного материала, касающегося построения числовых систем.

## 1.2 Место дисциплины в структуре образовательной программы

Программа дисциплины разработана в соответствии с федеральным государственным образовательным стандартом высшего образования по направлению подготовки 44.03.05 Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки), утвержденным приказом Минобрнауки России от 08.02.2021 г. №125, профессиональным стандартом: педагог (педагогическая деятельность в сфере дошкольного, начального общего, основного общего, среднего общего образования) (воспитатель, учитель), утвержденным приказом Министерства труда и социальной защиты Российской Федерации от 18.10.2013 г. №544н.

Дисциплина относится к обязательной части блока 1 «Дисциплины» учебного плана образовательной программы, изучается в 5 семестре. Трудоемкость дисциплины: 2 ЗЕ / 72 часа, в том числе 20 часов - контактная работа с преподавателем, 52 часа - самостоятельная работа (таблица 2).

## 1.3 Планируемые результаты обучения по дисциплине

Дисциплина направлена на формирование компетенции(-ий), представленных в таблице 1.

Таблица 1

### Планируемые результаты обучения по дисциплине

Код и наименование компетенции	
Индикаторы достижения компетенции	Планируемые результаты обучения по дисциплине
<b>УК-1 Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач</b>	
УК-1.1 Демонстрирует знание особенностей системного и критического мышления, аргументированно формирует собственное суждение и оценку информации, принимает обоснованное решение.	Знать: методы критического анализа и синтеза информации Уметь:
УК-1.2 Применяет логические формы и процедуры, способен к рефлексии по поводу собственной и чужой мыслительной деятельности.	применять системный подход для решения поставленных задач Владеть:
УК-1.3 Анализирует источники информации с целью выявления их противоречий и поиска достоверных суждений.	навыками рефлексии по поводу собственной и чужой мыслительной деятельности
<b>ПК-1 Способен осваивать и использовать теоретические знания и практические умения и навыки в предметной области при решении профессиональных задач</b>	
ПК-1.1 Знает структуру, состав и дидактические единицы предметной области (преподаваемого предмета).	Знать: • роль и место математики в общей картине научного знания; • структуру, состав и дидактические единицы содержания школьного курса математики.

<p>ПК-1.2 Умеет осуществлять отбор учебного содержания для его реализации в различных формах обучения в соответствии с требованиями ФГОС ОО.</p>	<p>Уметь: осуществлять отбор учебного содержания для его реализации в различных формах обучения в соответствии с современными требованиями к образованию.</p>
<p>ПК-1.3 Демонстрирует умение разрабатывать различные формы учебных занятий, применять методы, приемы и технологии обучения, в том числе информационные.</p>	<p>Владеть:  <ul style="list-style-type: none"> <li>• действием проектирования различных форм учебных занятий,</li> <li>• навыком применения различных методов, приемов и технологий в обучении математике.</li> </ul> </p>
<p><b>ПК-3 Способен формировать развивающую образовательную среду для достижения личностных, предметных и метапредметных результатов обучения средствами преподаваемых учебных предметов</b></p>	
<p>ПК-3.1 Владеет способами интеграции учебных предметов для организации развивающей учебной деятельности (исследовательской, проектной, групповой и др.).</p>	<p>Знать:  <ul style="list-style-type: none"> <li>• характеристику личностных, предметных и метапредметных результатов в контексте обучения математике;</li> <li>• особенности интеграции учебных предметов для организации разных способов учебной деятельности.</li> </ul> <p>Уметь:  <ul style="list-style-type: none"> <li>• оказывать педагогическую поддержку обучающимся в зависимости от их образовательных результатов;</li> <li>• организовывать учебный процесс с использованием возможностей образовательной среды для развития интереса к предмету в рамках урочной и внеурочной деятельности.</li> </ul> </p> </p>
<p>ПК-3.2 Использует образовательный потенциал социокультурной среды региона в преподавании (предмета по профилю) в учебной и во внеурочной деятельности.</p>	<p>Владеть:  <ul style="list-style-type: none"> <li>• навыками организации и проведения занятий с использованием возможностей образовательной среды для достижения образовательных результатов и обеспечения качества учебно-воспитательного процесса средствами математики.</li> </ul> </p>

## 2 СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

### Пятый семестр

#### Тема 1. Аксиоматическая теория натуральных чисел

1. Формулировка аксиоматической теории натуральных чисел.
2. Свойства сложения и умножения натуральных чисел.
3. Определение и свойства неравенств на  $\mathbb{N}$ .
4. Теорема о существовании наименьшего и наибольшего элементов в подмножествах натуральных чисел.
5. Бесконечность множества натуральных чисел.
6. Натуральные кратные и степени, их свойства.
7. Аксиоматика Пеано.
8. Независимость аксиом Пеано.

#### Тема 2. Аксиоматические теории целых и рациональных чисел

1. Упорядоченные множества и системы.
2. Аксиоматическая теория целых чисел, первичные термины и аксиомы.
3. Свойства целых чисел. Теорема о порядке на  $\mathbb{Z}$ .
4. Непротиворечивость аксиоматической теории целых чисел.
5. Аксиоматическая теория рациональных чисел, первичные термины и аксиомы.
6. Свойства рациональных чисел.
7. Теорема о порядке поля рациональных чисел.
8. Плотность поля рациональных чисел.
9. Непротиворечивость аксиоматической теории рациональных чисел.

#### Тема 3. Аксиоматическая теория действительных чисел. Комплексные числа

1. Аксиоматическая теория действительных чисел первичные термины и аксиомы.
  2. Свойства действительных чисел.
  3. Непротиворечивость аксиоматической теории действительных чисел.
- Комплексные числа и кватернионы
4. Аксиоматическая теория комплексных чисел, первичные термины и аксиомы.
  5. Свойства комплексных чисел.
  6. Теоремы о порядке на  $\mathbb{C}$ .
  7. Непротиворечивость аксиоматической теории комплексных чисел.

### Содержание работ по дисциплине

Таблица 2

Содержание работы	Виды и формы работы, час					Всего, час	Код компетенции
	Контактная работа						
	Лекции, в т.ч. в форме практической подготовки*	Лабораторные, в т.ч. в форме практической подготовки*	Практические, в т.ч. в форме практической подготовки*	Консультации, в т.ч. в форме практической подготовки*	Самостоятельная работа, в т.ч. в форме практической подготовки*		
<b>Пятый семестр</b>							
Тема 1. Аксиоматическая теория натуральных чисел	4		4(2)		20	28	УК-1, ПК-1, ПК-3
Тема 2. Аксиоматические теории целых и рациональных чисел	2		4(2)		18	24	УК-1, ПК-1, ПК-3

Тема 3. Аксиоматическая теория действительных чисел. Комплексные числа	2		4		14	20	УК-1, ПК-1, ПК-3
Подготовка к зачету							УК-1, ПК-1, ПК-3
Итого по дисциплине	8		12(4)		52	72	

\* В случае проведения контактной или самостоятельной работы в форме практической подготовки, часы на практическую подготовку указываются в скобках.

### **3 МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ОСВОЕНИЮ ДИСЦИПЛИНЫ**

Для успешного освоения дисциплины следует ознакомиться с содержанием разделов и тем по дисциплине (см. п. 2), следовать технологической карте при выполнении самостоятельной работы (табл. 3), использовать рекомендованные ресурсы (п. 4) и выполнять требования внутренних стандартов университета.

## 4 УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

### 4.1 Основная учебная литература

1. **Ларин, С.В.** Числовые системы : учебное пособие для пед. вузов : рекомендовано УМО вузов РФ / С. В. Ларин. - Москва : Академия, 2001. - 160 с. - (Высшее образование). - ISBN 5-7695-0823-X

2. Тропин, М. П. Числовые системы : курс лекций для студ. математического факультета : 4 курс / М. П. Тропин ; Новосиб. гос. пед. ун-т. - Новосибирск : НГПУ, 2009. - 119 с. - Библиогр.: с. 113. - URL: <https://lib.nspu.ru/views/library/87270/read.php> (дата обращения: 05.05.2026) . - Предм. указ.: с. 114-117.

### 4.2 Дополнительная учебная литература

1. Тропин, М.П. Числовые системы : задачник-практикум для студ. математического факультета : 4 курс / М. П. Тропин ; Новосиб. гос. пед. ун-т. - Новосибирск : НГПУ, 2009. - 64 с. - Библиогр.: с. 59. - URL: <https://lib.nspu.ru/views/library/87268/read.php> (дата обращения: 05.05.2026) . - Предм. указ.: с. 60-62. - Доступна эл. версия в ЭБС НГПУ

2. **Тропин, М. П.** Избранные главы алгебры и теории чисел : учебное пособие для студентов ИФМИЭО / М. П. Тропин ; Новосиб. гос. пед. ун-т. - Новосибирск : НГПУ, 2012. - 90 с. - Библиогр.: с. 86. - URL: <https://lib.nspu.ru/views/library/1269/read.php> (дата обращения: 05.05.2026) . - Предм. указ.: с. 87-88. - Доступна эл. версия в ЭБС НГПУ. - ISBN 978-5-85921-887-5

### 4.3 Ресурсы открытого доступа

1. Научная электронная библиотека. URL: [www.elibrary.ru](http://www.elibrary.ru)
2. Персональные сайты преподавателей. URL: <http://prepod.nspu.ru/>.
3. Единое окно доступа к образовательным ресурсам. URL: <http://window.edu.ru/>

### 4.4 Технологическая карта самостоятельной работы студента

Таблица 3

Темы дисциплины	Перечень учебно-методического обеспечения (номер источника из п.п. 4.1-4.3)
Задания для самостоятельной работы	
<b>Пятый семестр</b>	
<b>Тема 1. Аксиоматическая теория натуральных чисел</b>	Основная учебная литература: 1 Дополнительная учебная литература: 1, 2
Составить тест по теме.	
Составить срезовую работу по теме.	
Проработка лекционного материала, основной и дополнительной литературы по теме.	
1. Выясните, удовлетворяет ли множество $N'$ с заданным на нем отношением $n'$ «следовать за $n$ » аксиомам Пеано; укажите, какие аксиомы выполнены, а какие – нет: а) $N' = \{n \in N \mid n \geq 6\}$ , $n' = n + 1$ ; б) $N' = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , $1' = 2, 2' = 3, 3' = 4, 4' = 5, 5' = 1, 6' = 6$ .	
2. Вычислите: $2 + 3, 2 \cdot 3$ .	
3. Пусть $a, b, n \in N$ . Докажите справедливость следующих утверждений: а) $a + a = b + b \Rightarrow a = b$ ;	



- d. Является ли операция  $\otimes$  коммутативной?
- e. Дистрибутивна ли операция  $\otimes$  относительно операции  $\oplus$ ?
- f. Существует ли нейтральный элемент относительно операции  $\oplus$ ?
- g. Существует ли нейтральный элемент относительно операции  $\otimes$ ?
- h. Рефлексивно ли отношение  $\sim$ ?
- i. Симметрично ли отношение  $\sim$ ?
- j. Транзитивно ли отношение  $\sim$ ?
- k. Является ли отношение  $\sim$  отношением порядка? эквивалентности?
- l. Перечислите не менее трёх пар, принадлежащих классу эквивалентности, порожденному парой  $\langle 2, 3 \rangle$ .
- m. Существует ли среди классов эквивалентных пар элемент, противоположный классу, порожденному парой  $\langle 11, 9 \rangle$ ? Если – да, то найдите его, если – нет, докажите, что он не существует.

Проработка лекционного материала, основной и дополнительной литературы по теме.

**Тема 3. Аксиоматическая теория действительных чисел. Комплексные**

Основная учебная литература: 1  
Дополнительная учебная литература: 1, 2

1. Пусть  $F = \{ \{a_n\}_n \mid a_n \in \mathbf{Q}, \{a_n\}_n \text{ – фундаментальная последовательность} \}$ . Определим на  $F$  операции  $\oplus$ ,  $\otimes$  и отношение  $\sim$ . Для любых элементов  $\{a_n\}_n, \{b_n\}_n \in F$ :

$$\{a_n\}_n \oplus \{b_n\}_n = \{a_n + b_n\}_n,$$

$$\{a_n\}_n \otimes \{b_n\}_n = \{a_n \cdot b_n\}_n,$$

$$\{a_n\}_n \sim \{b_n\}_n \Leftrightarrow \{a_n - b_n\}_n \text{ – нулевая последовательность.}$$

- a. Является ли операция  $\oplus$  ассоциативной?
- b. Является ли операция  $\oplus$  коммутативной?
- c. Является ли операция  $\otimes$  ассоциативной?
- d. Является ли операция  $\otimes$  коммутативной?
- e. Дистрибутивна ли операция  $\otimes$  относительно операции  $\oplus$ ?
- f. Существует ли нейтральный элемент относительно операции  $\oplus$ ?
- g. Существует ли нейтральный элемент относительно операции  $\otimes$ ?
- h. Рефлексивно ли отношение  $\sim$ ?
- i. Симметрично ли отношение  $\sim$ ?
- j. Транзитивно ли отношение  $\sim$ ?
- k. Является ли отношение  $\sim$  отношением порядка? эквивалентности?

2. Рациональными или иррациональными являются числа:  $\sqrt{2}$ ;  $\sqrt{3}$ ;  $\sqrt{6} + \sqrt{2}$ ;  $\sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}} + \sqrt[3]{10 - 6\sqrt{3}}$ ?

**Комплексные числа и кватернионы**

1. Пусть  $P_3 = \{ \langle a, b \rangle \mid a, b \in \mathbf{R} \}$ . Определим на  $P_3$  операции  $\oplus$ ,  $\otimes$ . Для любых элементов  $\langle a, b \rangle, \langle c, d \rangle \in P_3$ :

$$\langle a, b \rangle \oplus \langle c, d \rangle = \langle a + b, c + d \rangle,$$

$$\langle a, b \rangle \otimes \langle c, d \rangle = \langle ac - bd, ad + bc \rangle.$$

- a) Является ли операция  $\oplus$  ассоциативной?
- b) Является ли операция  $\oplus$  коммутативной?
- c) Является ли операция  $\otimes$  ассоциативной?
- d) Является ли операция  $\otimes$  коммутативной?
- e) Дистрибутивна ли операция  $\otimes$  относительно операции  $\oplus$ ?
- f) Докажите, что существует нейтральный элемент  $\theta$  относительно операции  $\oplus$ .
- g) Докажите, что существует нейтральный элемент  $e$  относительно операции  $\otimes$ .

- h) Является ли система  $\langle P_3, \oplus, \otimes \rangle$  кольцом? полем?
- i) Решите на  $P_3$  уравнение  $x^2 \oplus e = \theta$ .
- j) Докажите, что для любых элементов  $\alpha \neq \theta, \beta \in P_3$  уравнение  $\alpha \otimes x = \beta$  разрешимо в  $P_3$ .

Проработка лекционного материала, основной и дополнительной литературы по теме.

**4.5 Выполнение курсовой работы (проекта).** Курсовая работа по дисциплине не предусмотрена.

## 5 РЕСУРСЫ, НЕОБХОДИМЫЕ ДЛЯ ОСУЩЕСТВЛЕНИЯ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ПРОЦЕССА ПО ДИСЦИПЛИНЕ

### 5.1 Информационные технологии

Образовательный процесс осуществляется с применением локальных и распределенных информационных технологий (таблицы 4, 5).

#### Локальные информационные технологии

Таблица 4

Группа программных средств	Перечень лицензионного и свободно распространяемого программного обеспечения, в том числе отечественного производства	Аудитория	Реквизиты подтверждающего документа
Офисные программы	LibreOffice	Ауд. №207 «Помещение для самостоятельной работы»	<a href="https://ru.libreoffice.org/about-us/license">https://ru.libreoffice.org/about-us/license</a>
Операционные системы	Manjaro Linux XFCE & KDE	Ауд. №207 «Помещение для самостоятельной работы»	<a href="http://gostrf.com/normadata/1/4293798/4293798256.htm">http://gostrf.com/normadata/1/4293798/4293798256.htm</a>
Научные расчеты	<ul style="list-style-type: none"> <li>• SageMath</li> <li>• Scilab</li> <li>• Maxima</li> <li>• PSPP</li> <li>• Среда статистических вычислений R</li> </ul>	Ауд. №207 «Помещение для самостоятельной работы»	<a href="http://gostrf.com/normadata/1/4293798/4293798256.htm">http://gostrf.com/normadata/1/4293798/4293798256.htm</a>
Графические редакторы	GIMP	Ауд. №207 «Помещение для самостоятельной работы»	<a href="https://www.gimp.org/about/COPYING">https://www.gimp.org/about/COPYING</a>

Браузеры (веб-обозреватели)	Firefox	Ауд. №207 «Помещение для самостоятельной работы»	<a href="https://rusgpl.ru/">https://rusgpl.ru/</a>
-----------------------------	---------	---	---

### Распределенные информационные технологии

Таблица 5

Группа	Наименование
Библиотеки и образовательные ресурсы (в том числе персональные сайты преподавателей КФ ФГБОУ ВО «НГПУ»)	Электронная библиотека НГПУ <a href="http://lib.nspu.ru">http://lib.nspu.ru</a>
	Электронная библиотека КФ ФГБОУ ВО «НГПУ» <a href="http://lib.kbnspu.ru/">http://lib.kbnspu.ru/</a>
	Персональные сайты преподавателей КФ ФГБОУ ВО «НГПУ» <a href="http://prepod.nspu.ru">http://prepod.nspu.ru</a>
	Система электронных портфолио студентов НГПУ <a href="https://www.nspu.ru/portfolio/">https://www.nspu.ru/portfolio/</a>

### 5.2 Материально-техническое обеспечение дисциплины

Таблица 6

Номер и наименование (при наличии) помещения для осуществления образовательной деятельности	Перечень основного оборудования	Адрес места осуществления образовательной деятельности (местоположение согласно лицензии)
Учебная аудитория для проведения учебных занятий лекционного типа		
Лекционный зал № 1	Комплект учебной мебели	632387, Новосибирская обл. г. Куйбышев, ул. Молодежная, дом 7
Лекционный зал № 2	Комплект учебной мебели	632387, Новосибирская обл. г. Куйбышев, ул. Молодежная, дом 7
Большой лекционный зал	Комплект учебной мебели	632387, Новосибирская обл. г. Куйбышев, ул. Молодежная, дом 7
Учебная аудитория для проведения учебных занятий семинарского типа (практические занятия, лабораторные занятия)/ Учебная аудитория для проведения групповых и индивидуальных консультаций/ Учебная аудитория для проведения текущего контроля и промежуточной аттестации		
Ауд. №102 «Учебная аудитория семинарского типа занятий»	Комплект учебной мебели, Доска аудиторная – 1шт.	632387, Новосибирская обл. г. Куйбышев, ул. Молодежная, дом 7

Ауд. №106 «Учебная аудитория семинарского типа занятий»	Комплект учебной мебели, Доска аудиторная – 1шт.	632387, Новосибирская обл. г. Куйбышев, ул. Молодежная, дом 7
Ауд. №107 «Учебная аудитория семинарского типа занятий»	Комплект учебной мебели, Доска аудиторная – 1шт.	632387, Новосибирская обл. г. Куйбышев, ул. Молодежная, дом 7
Помещение для самостоятельной работы обучающихся		
Ауд. №207 «Помещение для самостоятельной работы»	Комплект учебной мебели. Компьютерное оборудование: Компьютеры в комплекте (с выходом в сеть "Интернет" и доступом к электронной информационно-образовательной среде университета) – 8 шт., Печатное и сканирующее оборудование: принтеры –1шт.	632387, Новосибирская обл. г. Куйбышев, ул. Молодежная, дом 7
Помещение для хранения и профилактического обслуживания учебного оборудования		
Ауд. №217А «Помещение для хранения и профилактического обслуживания оборудования»	Инвентарь: Тестер компьютерный – 1 шт. Специализированный инвентарь – 1шт. Набор инструментов для оргтехники – 1 шт (28 предметов). Измерительное оборудование: Вольтметры – 1шт., Мультиметр – 1шт., Компьютерное оборудование: Компьютер в комплекте – 1шт. Печатное оборудование: – 1шт.	632387, Новосибирская обл. г. Куйбышев, ул. Молодежная, дом 7

## 6 ОЦЕНОЧНЫЕ МАТЕРИАЛЫ

### 6.1 Оценочные материалы для проведения текущего контроля успеваемости

Таблица 7

№ п/п	Наименование темы	Код компетенции	Формы проверки
Пятый семестр			
1	Тема 1. Аксиоматическая теория натуральных чисел	УК-1, ПК-1, ПК-3	1. Математический диктант 2. Срезовая работа.
2	Тема 2. Аксиоматические теории целых и рациональных чисел	УК-1, ПК-1, ПК-3	1. Математический диктант. 2. Срезовая работа.
3	Тема 3. Аксиоматическая теория действительных чисел. Комплексные числа	УК-1, ПК-1, ПК-3	1. Математический диктант. 2. Срезовая работа.

### 6.2 Оценочные материалы для проведения промежуточной аттестации обучающихся

Таблица 8

Оценочные материалы для промежуточной аттестации
Пятый семестр (Зачет)
<b>Код компетенции: УК-1</b>
<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Формулировка аксиоматической теории натуральных чисел.</li> <li>2. Свойства сложения и умножения натуральных чисел.</li> <li>3. Определение и свойства неравенств на <math>\mathbb{N}</math>.</li> <li>4. Теорема о существовании наименьшего и наибольшего элементов в подмножествах натуральных чисел.</li> <li>5. Бесконечность множества натуральных чисел.</li> <li>6. Натуральные кратные и степени, их свойства.</li> <li>7. Аксиоматика Пеано.</li> <li>8. Независимость аксиом Пеано.</li> <li>9. Аксиоматическая теория целых чисел, первичные термины и аксиомы.</li> <li>10. Свойства целых чисел. Теорема о порядке на <math>\mathbb{Z}</math>.</li> <li>11. Непротиворечивость аксиоматической теории целых чисел.</li> <li>12. Аксиоматическая теория рациональных чисел, первичные термины и аксиомы.</li> <li>13. Свойства рациональных чисел.</li> <li>14. Теорема о порядке поля рациональных чисел.</li> <li>15. Непротиворечивость аксиоматической теории рациональных чисел.</li> <li>16. Аксиоматическая теория действительных чисел первичные термины и аксиомы.</li> <li>17. Свойства действительных чисел.</li> <li>18. Непротиворечивость аксиоматической теории действительных чисел.</li> <li>19. Аксиоматическая теория комплексных чисел, первичные термины и аксиомы.</li> <li>20. Свойства комплексных чисел.</li> <li>21. Непротиворечивость аксиоматической теории комплексных чисел.</li> <li>22. Типовые задачи</li> </ol>

Задания для типовых контрольных работ

**Аксноматическая теория натуральных чисел**

1. Выясните, удовлетворяет ли множество  $N'$  с заданным на нем отношением  $n'$  «следовать за  $n$ » аксиомам Пеано, укажите, какие аксиомы выполнены, а какие – нет:

a)  $N' = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geq 6\}$ ,  $n' = n + 1$ ; б)  $N' = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ,  $1' = 2, 2' = 3, 3' = 4, 4' = 5, 5' = 1, 6' = 6$ .

2. Вычислите:  $2 + 3, 2 \cdot 3$ .

3. Пусть  $a, b, n \in \mathbb{N}$ . Докажите справедливость следующих утверждений:

a)  $a + a = b + b \Rightarrow a = b$ ; б)  $n > 1 \Rightarrow \exists(x \in \mathbb{N}) : n = 2x \vee n = 2x + 1$ ; в)  $a > 2 \Rightarrow \exists(k \in \mathbb{N}) : a = 3k \vee a = 3k + 1 \vee a = 3k + 2$ ;

д)  $n \neq 1 \Rightarrow \exists(x \in \mathbb{N}) : (n - 1) \cdot n = x + x$ ; е)  $n \neq 1 \Rightarrow \exists(x \in \mathbb{N}) : (n - 1) \cdot n \cdot (n + 1) = 3x$ .

4. Решите на множестве натуральных чисел уравнения:

a)  $x^2 = 2$ ;

д)  $xy = 1$ ;

г)  $4x = 4y + 1$ ;

**Аксноматические теории целых и рациональных чисел**

1. Пусть  $P_1 = \{(m, n) \mid m, n \in \mathbb{N}\}$ . Определим на  $P_1$  операции  $\oplus, \otimes$  и отношение  $\sim$ . Для любых элементов  $\langle m, n \rangle, \langle k, l \rangle \in P_1$ :

$$\langle m, n \rangle \oplus \langle k, l \rangle = \langle m + k, n + l \rangle, \langle m, n \rangle \otimes \langle k, l \rangle = \langle mk + nl, ml + nk \rangle, \langle m, n \rangle \sim \langle k, l \rangle \Leftrightarrow m + l = k + n.$$

a. Является ли операция  $\oplus, \otimes$  ассоциативной, коммутативной?

b. Дистрибутивна ли операция  $\otimes$  относительно операции  $\oplus$ ?

c. Существует ли нейтральный элемент относительно операции  $\oplus, \otimes$ ? Является ли система  $(P_1, \oplus, \otimes)$  кольцом?

d. Рефлексивно, симметрично, транзитивно ли отношение  $\sim$ ?

e. Является ли отношение  $\sim$  отношением порядка? эквивалентности?

f. Перечислите не менее трёх пар, принадлежащих классу эквивалентности, порожденному парой  $(2, 3)$ .

2. Решите на множестве целых чисел уравнения:

a)  $x^2 = 2$ ;

д)  $xy = 1$ ;

г)  $4x = 4y + 1$ ;

3. Пусть  $P_2 = \{(a, n) \mid a \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$ . Определим на  $P_2$  операции  $\oplus, \otimes$  и отношение  $\sim$ . Для любых элементов  $\langle a, n \rangle, \langle b, m \rangle \in P_2$ :

$$\langle a, n \rangle \oplus \langle b, m \rangle = \langle am + bn, mn \rangle, \langle a, n \rangle \otimes \langle b, m \rangle = \langle ab, mn \rangle, \langle a, n \rangle \sim \langle b, m \rangle \Leftrightarrow am = bn.$$

a. Является ли операция  $\oplus, \otimes$  ассоциативной, коммутативной.

b. Дистрибутивна ли операция  $\otimes$  относительно операции  $\oplus$ ?

c. Существует ли нейтральный элемент относительно операции  $\oplus, \otimes$ ?

d. Рефлексивно, симметрично, транзитивно ли отношение  $\sim$ ?

e. Является ли отношение  $\sim$  отношением порядка? эквивалентности?

f. Перечислите не менее трёх пар, принадлежащих классу эквивалентности, порожденному парой  $(2, 3)$ .

**Аксноматическая теория действительных чисел**

1. Пусть  $F = \{\{a_n\}_n \mid a_n \in \mathbb{Q}, \{a_n\}_n - \text{фундаментальная последовательность}\}$ . Определим на  $F$  операции  $\oplus, \otimes$  и отношение  $\sim$ . Для любых элементов  $\{a_n\}_n, \{b_n\}_n \in F$ :

$$\{a_n\}_n \oplus \{b_n\}_n = \{a_n + b_n\}_n, \{a_n\}_n \otimes \{b_n\}_n = \{a_n \cdot b_n\}_n, \{a_n\}_n \sim \{b_n\}_n \Leftrightarrow \{a_n - b_n\}_n - \text{нулевая последовательность.}$$

a. Является ли операция  $\oplus$  ассоциативной?

b. Является ли операция  $\oplus$  коммутативной?

c. Является ли операция  $\otimes$  ассоциативной?

d. Является ли операция  $\otimes$  коммутативной?

e. Дистрибутивна ли операция  $\otimes$  относительно операции  $\oplus$ ?

f. Существует ли нейтральный элемент относительно операции  $\oplus$ ?

g. Существует ли нейтральный элемент относительно операции  $\otimes$ ?

h. Рефлексивно ли отношение  $\sim$ ?

i. Симметрично ли отношение  $\sim$ ?

j. Транзитивно ли отношение  $\sim$ ?

k. Является ли отношение  $\sim$  отношением порядка? эквивалентности?

2. Рациональными или иррациональными являются числа:  $\sqrt{2}$ ;  $\sqrt{3}$ ;  $\sqrt{6} + \sqrt{2}$ ;  $\sqrt[3]{10 + 6\sqrt{3}} + \sqrt[3]{10 - 6\sqrt{3}}$ ?

**Комплексные числа и кватернионы**

1. Пусть  $P_3 = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$ . Определим на  $P_3$  операции  $\oplus, \otimes$ . Для любых элементов  $\langle a, b \rangle, \langle c, d \rangle \in P_3$ :

$$\langle a, b \rangle \oplus \langle c, d \rangle = \langle a + b, c + d \rangle,$$

$$\langle a, b \rangle \otimes \langle c, d \rangle = \langle ac - bd, ad + bc \rangle.$$

a) Является ли операция  $\oplus$  ассоциативной?

b) Является ли операция  $\oplus$  коммутативной?

c) Является ли операция  $\otimes$  ассоциативной?

d) Является ли операция  $\otimes$  коммутативной?

e) Дистрибутивна ли операция  $\otimes$  относительно операции  $\oplus$ ?

f) Докажите, что существует нейтральный элемент  $\theta$  относительно операции  $\oplus$ .

g) Докажите, что существует нейтральный элемент  $e$  относительно операции  $\otimes$ .

h) Является ли система  $(P_3, \oplus, \otimes)$  кольцом? полем?

i) Решите на  $P_3$  уравнение  $x^2 \oplus e = \theta$ .

j) Докажите, что для любых элементов  $\alpha \neq \theta, \beta \in P_3$  уравнение  $\alpha \otimes x = \beta$  разрешимо в  $P_3$ .

2. Для кватернионов  $\alpha = 2i + 3k$  и  $\beta = 4j - 5k$  найдите:  $\alpha - \beta$ ;  $\alpha \cdot \beta$ ;  $\alpha^2 + \beta^2$ ;  $2\alpha - \beta - 1$ .

**Код компетенции: ПК-1**

1. Формулировка аксиоматической теории натуральных чисел.
2. Свойства сложения и умножения натуральных чисел.
3. Определение и свойства неравенств на  $\mathbb{N}$ .
4. Теорема о существовании наименьшего и наибольшего элементов в подмножествах натуральных чисел.
5. Бесконечность множества натуральных чисел.
6. Натуральные кратные и степени, их свойства.
7. Аксиоматика Пеано.
8. Независимость аксиом Пеано.
9. Аксиоматическая теория целых чисел, первичные термины и аксиомы.
10. Свойства целых чисел. Теорема о порядке на  $\mathbb{Z}$ .
11. Непротиворечивость аксиоматической теории целых чисел.
12. Аксиоматическая теория рациональных чисел, первичные термины и аксиомы.
13. Свойства рациональных чисел.
14. Теорема о порядке поля рациональных чисел.
15. Непротиворечивость аксиоматической теории рациональных чисел.
16. Аксиоматическая теория действительных чисел первичные термины и аксиомы.
17. Свойства действительных чисел.
18. Непротиворечивость аксиоматической теории действительных чисел.
19. Аксиоматическая теория комплексных чисел, первичные термины и аксиомы.
20. Свойства комплексных чисел.
21. Непротиворечивость аксиоматической теории комплексных чисел.

**Код компетенции: ПК-3**

1. Формулировка аксиоматической теории натуральных чисел.
2. Свойства сложения и умножения натуральных чисел.
3. Определение и свойства неравенств на  $\mathbb{N}$ .
4. Теорема о существовании наименьшего и наибольшего элементов в подмножествах натуральных чисел.
5. Бесконечность множества натуральных чисел.
6. Натуральные кратные и степени, их свойства.
7. Аксиоматика Пеано.
8. Независимость аксиом Пеано.
9. Аксиоматическая теория целых чисел, первичные термины и аксиомы.
10. Свойства целых чисел. Теорема о порядке на  $\mathbb{Z}$ .
11. Непротиворечивость аксиоматической теории целых чисел.
12. Аксиоматическая теория рациональных чисел, первичные термины и аксиомы.
13. Свойства рациональных чисел.
14. Теорема о порядке поля рациональных чисел.
15. Непротиворечивость аксиоматической теории рациональных чисел.

16. Аксиоматическая теория действительных чисел первичные термины и аксиомы.
17. Свойства действительных чисел.
18. Непротиворечивость аксиоматической теории действительных чисел.
19. Аксиоматическая теория комплексных чисел, первичные термины и аксиомы.
20. Свойства комплексных чисел.
21. Непротиворечивость аксиоматической теории комплексных чисел.

### **Критерии выставления отметок**

Отметка «отлично» / «зачтено» (высокий уровень сформированности компетенций (-ии)) выставляется обучающемуся, который в процессе изучения дисциплины и по результатам промежуточной аттестации, обнаружил системные знания по всем разделам программы дисциплины / модуля / практики, продемонстрировал способность к их самостоятельному пополнению, в том числе в рамках учебно-исследовательской и научно-исследовательской деятельности; при выполнении заданий, предусмотренных программой, успешно продемонстрировал осваиваемые в рамках дисциплины / модуля / практики профессиональные умения; представил результаты выполнения всех заданий для самостоятельной работы полностью и качественно, на творческом уровне, выразил личностную значимость деятельности; при устном ответе высказал самостоятельное суждение на основе исследования теоретических источников, логично и аргументированно изложил материал, связал теорию с практикой посредством иллюстрирующих примеров, свободно ответил на дополнительные вопросы; при выполнении письменного задания представил содержательный, структурированный, глубокий анализ сути и путей решения проблемы (задачи, задания); при выполнении тестовых заданий дал правильные ответы на 85 – 100 % заданий.

Отметка «хорошо» / «зачтено» (средний уровень сформированности компетенций (-ии)) выставляется обучающемуся, который в процессе изучения дисциплины и по результатам промежуточной аттестации, обнаружил знание основного материала по всем разделам программы дисциплины / модуля / практики в объеме, необходимом для дальнейшей учебы и предстоящей работы по профессии, продемонстрировал способность к их самостоятельному пополнению; при выполнении заданий, предусмотренных программой, смог продемонстрировать осваиваемые профессиональные умения, но допустил не принципиальные ошибки в их выполнении, которые смог исправить при незначительной помощи преподавателя; представил результаты выполнения всех заданий для самостоятельной работы, указанных в программе дисциплины / модуля / практики, при этом задания выполнены полностью и качественно; при устном ответе объяснил учебный материал, интерпретировал содержание, экстраполировал выводы; при выполнении письменного задания представил репродуктивную позицию элементы анализа в описании сути и путей решения проблемы (задачи, задания), изложил логическую последовательность вопросов темы;- при выполнении тестовых заданий дал правильные ответы на 75 – 84 % заданий.

Отметка «удовлетворительно» / «зачтено» (пороговый уровень сформированности компетенций (-ии)) выставляется обучающемуся, который в процессе изучения дисциплины и по результатам промежуточной аттестации, обнаружил знание основного материала по всем разделам программы дисциплины / модуля / практики в объеме, необходимом для дальнейшей учебы и предстоящей работы по профессии, но знания имеют пробелы и плохо структурированы; при выполнении заданий, предусмотренных программой, в целом смог продемонстрировать осваиваемые профессиональные умения, но допустил ошибки в их выполнении, которые смог исправить при незначительной помощи преподавателя; представил результаты выполнения всех заданий для самостоятельной работы, указанных в программе дисциплины / модуля / практики, при этом задания выполнены формально, кратко, рефлексия неполная или носит формальный характер, представлено поверхностное описание; при устном ответе продемонстрировал знание базовых положений и ключевых понятий, верно воспроизвел учебное содержание без использования

дополнительного материала; при выполнении письменного задания представил репродуктивную позицию в описании сути и путей решения проблемы (задачи, задания); при выполнении тестовых заданий дал правильные ответы на 60 – 74 % заданий.

Отметка «неудовлетворительно» / «не зачтено» (компетенция(-ии) не сформирована(-ы)) выставляется обучающемуся, который в процессе изучения дисциплины и по результатам промежуточной аттестации, обнаружил отсутствие знаний либо фрагментарные знания по основным разделам программы дисциплины / модуля / практики; при выполнении заданий, предусмотренных программой, не смог продемонстрировать осваиваемые профессиональные умения (допустил принципиальные ошибки в их выполнении, которые не смог исправить при указании на них преподавателем), либо не выполнил задания; не выполнил предусмотренные учебным планом практические, лабораторные задания; не полностью выполнил задания для самостоятельной работы, указанных в программе дисциплины / модуля / практики, либо задания выполнены неверно, очевиден плагиат; при устном ответе допустил фактические ошибки в использовании научной терминологии и изложении учебного содержания, сделал ложные выводы; при выполнении тестовых заданий дал правильные ответы на 0 – 59 % заданий.